基础数学讲义之四

《基础分析学之一》

单元微积分学

项武义

香港科技大学数学系

目录

引子

人类生存的地球，比之于无限的宇宙实乃无比的渺小；而自古至今人类的理性文明只不过数千年，比之于地球上几十亿年的生命历史又是无比的短暂。但是人类得天独厚，具有几十亿年逐步进化而得——奇妙超群的脑力；再者，人类还能善用天赋的脑力，创造语言与文字，使得全人类的聪明才智不但能够群策群力、集思广益，而且还能世代相承、精益求精，创造了博大精深的理性文明。作为一个现代人，我们不但具有天赋的脑力，而且还承继了数千年来全人类的聪明才智，世代相承探讨研究的成果，总称之谓理性文明 (Civilization of Rational Mind)。它使得每一位肯学、肯想的人生，大大地拓展了其能够理解的时空。

综观自古至今的理性文明，历代的先智先贤用来探索宇宙的基本思想和方法其实是既自然又朴实的，大体上可以简述如下：

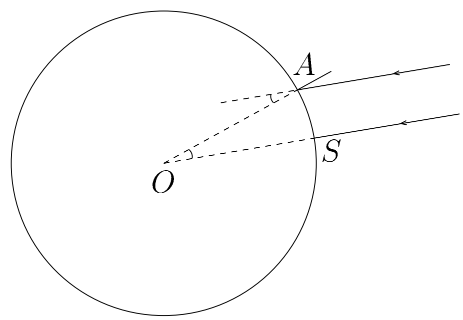
> 先用归纳法，师法自然，实事求是。例如观测天象，纪录昼夜之长短，四季的变化等等。然後再用解析思维把实验探索所得的各种各样认知加以综合、演绎，逐步由定性到定量，由表象到内在结构，精益求精地研讨大自然中万象万物的基本结构和基本原理。

总之，实验归纳和综合演绎乃是两种相辅相成交互进展的科学方法，而数理分析 (Mathematical Analysis) 则是後者的基本方法和有力工具，分析学的基础理论也就是如此产生的。我们将在往後章节中简明扼要地讨论数理分析在人类理性文明中产生的过程和其所扮演的角色。

在我们开始逐章逐节作系统研讨之前，且以一个既清晰简朴又具有历史意义的范例，来对于数理分析的本质和要点作一初步解说。那就

是远在纪元前三世纪 Eratosthenes (约 276–194 B.C.) 所达成者：人类对于地球大小的首次定量估算。

话说当年，Eratosthenes 乃是古希腊文明後期中心所在地 Alexandria 的图书馆馆长，他是一位精通当时的天文地理的博学之士。首先，当年业已由月蚀，航海的观察得知我们所居住的大地乃是一个大球；而且太阳和地球之间的距离要比地球和月亮之间的距离还要大许多倍。总之，同时照射到地球上各地的太阳光基本上就是平行光线。再者，他还知得人们在 Alexandria 正南方尼罗河出山口的 Syene（现今的 Aswan）的一口深井，观察到夏至正午的太阳光可以直射井底，不留任何井壁的阴影。换言之，在 Syene 夏至正午的太阳光乃是垂直于该井的水平面者也。但是在 Alexandria 的夏至正午的阳光，则和井壁大约有 $\frac{1}{50}$ 周角（亦即 7.2 度）的夹角。当年 Eratosthenes 大概就用如下图所示的图解，把上述几个天文地理的知识加以综合分析。



他以一个圆表示过 Alexandria 和 Syene 的经圆 (longitudual circle)，以两条平行线表达分别照射在 Alexandria 和 Syene 的夏至正午的阳光。从上述简明扼要的抽象表述，就可以用熟知的几何知识推论以下几点：其一是过 Syene 的光线垂直于球面，所以其延长线乃是过球心 O 者也。其二是由平行线和 Alexandria–球心联线的内错角相等得知 $\angle AOS$ 也等于 $\frac{1}{50}$ 周角。由此可得整个经圆的周长大约是 Alexandria 和 Syene 之间的距离的 50 倍！

Eratosthenes 这位老先生并没有去实地测量上述两地之间的距离。他只是去市集向往来于 Alexandria 和 Syene 之间的骆驼商队，询问他们一共要走几天才能由 Syene 走到 Alexandria，而且每天大约能走多少希腊里 (Stadia)。他就将询问所得的天数 (50 天) 和每天的里程 (100 Stadia)

得出下列经圆圆周长度的估计，亦即

$$50 \times 50 \times 100 = 250,000 \quad \text{(Stadia)}$$

这就是人类对于其所生存的地球大小的第一次定量估计。

假如要把它和现代测算的地球大小作个比较，当然就要把希腊里 (Stadia) 和公里 (kilometer) 的长度作一换算。在这里有一个小小的疑案：Stadia 者，乃是当年运动场 (Stadium) 的跑道的长度是也。但是目下馀留的古希腊运动场的跑道却有两种长短不一的长度。总之，以较长者来换算则其估计比实测要大些，而以较短者来换算则其估计比实测要小些，而相去都在 10% 之内。

如今回顾 Eratosthenes 在两千多年前，能够把当时所知道的天文、地理和几何知识，用简朴的图解加以综合分析，一举而得数量上相当准确的地球大小的估计，它实在是人类以数理分析去理解大自然的一个杰出的典范。世世代代理性文明的继承者，不但应该以怀古之情瞻仰它，而且更要从中学习其用法，获得数理分析的启蒙启发。

导论——数系和数系的扩张

数理分析是我们由表及里，定量地深入研讨大自然的重要方法，而分析学 (Analysis) 也就是为了有效运用数理分析去理解大自然而发展起来的一门数学。当所要研讨的事物还是相当简单初等者，其相应的各种各样定量问题往往是初等的代数问题和几何问题，例如复利的计算、平面测量等等。但是当所要研讨的问题逐渐深入，逐步拓展，就自然而然地超出了初等代数和初等几何力所能及的范畴，例如天体的运行、曲线曲面的研究、弦的振动等等。其实，分析学乃是以初等代数和初等几何为基础，把两者结合起来，更上层楼而发展起来的；它是对于各种各样动态事物作数理分析的重要工具，而其本身的基础理论则在于函数的微分、积分和连续性的明确及其基本定理。这也就是为什麼通常把分析学基础论叫做微积分的原由。

代数和几何的基础，归根研底乃是建筑在数系和空间这两种基本结构之上。空间乃是我们和宇宙万物共存于其中者，是大自然所赋予的；而数系则是人类理性文明为了更加精确地定量研讨事物所构造的「计量」体系，可以说是人的创造。在定量几何学定量地研讨空间本质的讨论之中，前者和後者则自然而然地结合在一起，相辅相成。

最原始的数系就是我们用来数个数 (counting) 的自然数系 (system of natural numbers)，然後逐步扩充而得整数系 (system of integers)、有理数系 (system of rational numbers)、实数系 (system of real numbers) 和复数系 (system of complex numbers)。通常分别以 $\mathbb{N}$、$\mathbb{Z}$、$\mathbb{Q}$、$\mathbb{R}$、$\mathbb{C}$ 表示上述数系，则上述逐步扩充（张）(extensions) 就可以用下述符号

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

简约地表达之。

我们首先将对上述逐步扩张而构造的一连串数系作一次归本究源的结构分析。唯有对数系结构的来龙去脉了然于心，才能在运用它们作各种各样定量分析、探索自然时得心应手。

0.1 自然数系

自然数系是人类为了数个数 (counting) 这样一种原始而且基本的「定量化」而创造的体系。例如有一位牧羊人要知道其羊群的个数，或当古人发现月亮的圆缺变化是一种周而复始的事情，自然就想统计一下其周期的天数等等。虽然各古文明所用的符号和体系不同，但是其本质都是一串逐一相连的符号体系，例如

$$\begin{array}{ccccc} | & || & ||| & |||| & \cdots \\ \text{一} & \text{二} & \text{三} & \text{四} & \cdots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots \end{array}$$

其中第一个符号表示「单元」，是一只羊，一个人或一棵树的抽象化，而後继符号则表示比前述所表达者<u>再增添多一个单元</u>，亦即

$$\begin{aligned} &2 = 1 + 1,\ 3 = 2 + 1,\ 4 = 3 + 1,\ 5 = 4 + 1,\ \cdots \\ &101 = 100 + 1,\ 102 = 101 + 1,\ \cdots, \text{如此类推} \end{aligned}$$

由此可见，自然数系最为原始、基本的结构就是「+1」运算。在自然数系这一串顺序排列的符号体系中，後继者就是前者「+1」之所得，所以任何一个自然数都可以由 1 起始，逐步「+1」而得之（其实这就是我们构造自然数系的方法）。

把上述事实改用「数学化」的集合用语来描述，即为：

【数学归纳法原理】(Principle of Mathematical Induction)：一个自然数系的子集 $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{N}$ 若满足下述两个条件

$$\text{(i) } 1 \in \mathcal{S}, \quad \text{(ii) } n \in \mathcal{S} \Rightarrow n + 1 \in \mathcal{S} \tag{0.1}$$

则 $\mathcal{S}$ 其实就等于 $\mathbb{N}$。

自然数系之所以有用、好用是因为它具有满足交换律、结合律和分配律的加法和乘法运算，这都是大家所熟知常用者。假如有人问你或

者你自问：「为什麼那些运算律总是成立的呢？」此问显然不能用：「实例的计算从来没碰到不成立的情形，所以应该是成立的」，或者是人云亦云地：「大家都说它们总是成立，所以我也相信它们是对的」等等作为解释，因为自然数的个数是无限，而实例计算所能验算者只是很小、很小的一部分，所以加、乘运算的运算律的普遍成立是需要加以论证的！这也就是我们所要讨论的首个课题。此事当然得从加法和乘法的根源（亦即本质）说起。

加法的本质乃是「$+1$」运算的复合。例如「$+2$」就是把「$+1$」做两次（符号 “2” 所代表的意义）的结果，「$+3$」就是把「$+1$」做三次的结果，「$+(n+1)$」就是比「$+n$」再多做一次「$+1$」者也。由此可见

$$a+(n+1)=(a+n)+1 \tag{0.2}$$

其实就是加法的归纳定义式。再者下述的加法结合律所描述者：

$$(a+m)+n=a+(m+n) \tag{0.3}$$

就是对 a 先作 m 次「$+1$」然後接著再作 n 次「$+1$」，其结果也就是对 a 作 $(m+n)$ 次「$+1$」，由此可见加法结合律的普遍成立是直观明显的。把它改用数学化的用语与格式说清楚，则是下述归纳论证 (proof by induction)。

【定理 0.1】（加法结合律）：$(a+m)+n=a+(m+n)$。

证明：对于任给 a, m，归纳证明上式对于所有自然数 n 皆成立。

(i) $n=1$ 时，$(a+m)+1=a+(m+1)$ 就是加法的归纳定义式。

(ii) 由归纳假设 $(a+m)+n=a+(m+n)$，则有

$$\begin{aligned}(a+m)+(n+1) &= \big[(a+m)+n\big]+1 && [\text{加法归纳定义式}]\\ &= \big[a+(m+n)\big]+1 && [\text{归纳假设}]\\ &= a+\big[(m+n)+1\big] && [\text{加法归纳定义式}]\\ &= a+\big[m+(n+1)\big] && [\text{加法归纳定义式}]\ \square\end{aligned}$$

接著让我们再用归纳法来证明加法交换律。

【定理 0.2】（加法交换律）：$a+b=b+a$。

证明：先用归纳法证明 (i) $a+1=1+a$：

(1) $a=1$ 时，$1+1=1+1$ 是显然的。

(2) 由归纳假设 $a+1=1+a$，则有

$$\begin{aligned}(a+1)+1 &= (1+a)+1 && [\text{归纳假设}]\\ &= 1+(a+1) && [\text{结合律}]\end{aligned}$$

然後再由归纳假设 $a+b=b+a$ 证明

$$\text{(ii)} \quad a+(b+1)=(b+1)+a$$

其证明如下：

$$\begin{aligned}a+(b+1) &= (a+b)+1 && [\text{结合律}]\\ &= (b+a)+1 && [\text{归纳假设}]\\ &= b+(a+1) && [\text{结合律}]\\ &= b+(1+a)=(b+1)+a && \square\end{aligned}$$

现在让我们来分析一下乘法的本质。乘法其实是自相加的缩写：

「$m \cdot a$」就是 m 个 a 自相加的总和（所以 $1 \cdot a = a$）

因此 $(m+1) \cdot a$ 所表达者就是比 $m \cdot a$ 再多加一个 a。由此可见，乘法的归纳定义式就是

$$1 \cdot a = a, \quad (m+1) \cdot a = m \cdot a + a \tag{0.4}$$

再者，乘法的左分配律：

$$m \cdot a + n \cdot a = (m+n) \cdot a \tag{0.5}$$

就是说把 m 个 a 自相加的「总和」和 n 个 a 自相加的「总和」再加起来，其实就等于 $(m+n)$ 个 a 自相加的总和。此事亦为直观上极为明显者，下面我们给它作一次归纳的证明。

[注意]：在尚未证明乘法交换律之前，分配律是有左、右之分别的。其实，乘法交换律的证明是要在左、右分配律都证得之後才能证得者。

【定理 0.3】（乘法的左分配律）：$m \cdot a + n \cdot a = (m+n) \cdot a$。

证明：对于任给 m, a，归纳证明上式对于所有自然数 n 皆成立。

(i) $n=1$ 时，由定义式知 $m\cdot a+1\cdot a=(m+1)\cdot a$。

(ii) 由归纳假设 $m\cdot a+n\cdot a=(m+n)\cdot a$，则有

$$\begin{aligned} m\cdot a+(n+1)\cdot a &= m\cdot a+(n\cdot a+a) && [\text{乘法归纳定义式}] \\ &= (m\cdot a+n\cdot a)+a && [\text{加法结合律}] \\ &= (m+n)\cdot a+a && [\text{归纳假设}] \\ &= \big[(m+n)+1\big]\cdot a && [\text{乘法归纳定义式}] \\ &= \big[m+(n+1)\big]\cdot a && \square \end{aligned}$$

【定理 0.4】（乘法的右分配律）：$m\cdot(a+b)=m\cdot a+m\cdot b$。

证明：任取 a,b，对 m 作归纳证明如下：

(i) $m=1$ 时是显然成立的。

(ii) 由归纳假设 $m\cdot(a+b)=m\cdot a+m\cdot b$ 成立，则有

$$\begin{aligned} (m+1)\cdot(a+b) &= m\cdot(a+b)+(a+b) && [\text{乘法归纳定义式}] \\ &= (m\cdot a+m\cdot b)+(a+b) && [\text{归纳假设}] \\ &= (m\cdot a+a)+(m\cdot b+b) && [\text{加法结合律、交换律}] \\ &= (m+1)\cdot a+(m+1)\cdot b && \square \end{aligned}$$

【定理 0.5】（乘法交换律）：$a\cdot b=b\cdot a$。

证明：留作习题。

【定理 0.6】（乘法结合律）：$(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$。

证明：留作习题。

指数符号：在本质上，乘方乃是自相乘的缩写。我们常用的指数符号，其归纳定义式也就是：

$$a^1=a,\quad a^{(m+1)}=a^m\cdot a \tag{0.6}$$

【习题】：

(1) 试证指数定则 $a^m\cdot a^n=a^{m+n}$。

(2) 试证指数定则 $(a\cdot b)^m=a^m\cdot b^m$。

(3) 试证指数定则 $(a^m)^n=a^{n\cdot m}$。

0.2 整数数系

在自然数系内，我们定义减法为加法的逆算：$(a-b)$ 就是加上 b 之後就等于 a 的那个唯一的数，亦即方程式

$$x+b=a \tag{0.7}$$

的唯一解就是 $(a-b)$。但是在自然数系中，上述方程式只有在 a 大于 b 时才能「有解」！在此，一个自然而然的想法是：上式在 $a \le b$ 时在自然数系中「无解」乃是由于自然数系的范畴太狭窄了，因此可以把它作适当的扩充来消除这种不理想的缺陷。换句话说，我们由自然数去构造一些新的数，使得在扩张後的数系中 $x+b=a$ 总是有唯一解。例如设

$$x+1=1 \tag{0.8}$$

的解是一个新的数「0」，则由下述归纳论据

$$0+n=n \Rightarrow 0+(n+1)=(0+n)+1=n+1 \tag{0.9}$$

可见这个新数「0」应当满足 $0+a=a$（a 为自然数）。再者，我们也需要引进

$$x+a=0 \tag{0.10}$$

的解，以符号「$-a$」表之。由此易见在 $a>b$ 时，$x+b=a$ 的解是一个自然数 $(a-b)$，而在 $a<b$ 时 $x+b=a$ 的解就应该是那个新数 $-(b-a)$，因为理应有

$$\begin{aligned}-(b-a)+b &= -(b-a)+\big[(b-a)+a\big]\\ &= \big[-(b-a)+(b-a)\big]+a\\ &= 0+a=a\end{aligned} \tag{0.11}$$

总结上述简短分析，可见一个包含自然数系的扩张数系，若要满足同样的加乘运算律，而且使得减法通行无阻，亦即 $x+b=a$ 对于任给 a,b 恒有解，则它至少包含一个「0」和每个自然数 a 的负数「$-a$」。这样一个数系就是我们常用、好用的整数系：

$$\mathbb{Z}=\mathbb{N}\cup\{0\}\cup\{-a,\, a\in\mathbb{N}\} \tag{0.12}$$

当然，我们还得要适当地定义整数系中的加、乘和指数运算。在这个关键性的步骤上，定义的适当性的检验准则是在扩张的数系中依然保有各个运算律，因为那些运算律乃是数系有用、好用的根本所基。其实上述保有运算律的准则业已唯一地确定了整数系中加、乘、指数运算的适当定义的必然性。兹分析如下：

【分析】：

(1) $0+0=0, 0+a=a, (-a)+a=0$ 乃是「0」和「$-a$」的定义式。

(2) 对于任给自然数 a, b，

$$\begin{cases} (-a)+b=b+(-a)=b-a \\ (-a)+b=b+(-a)=-(a-b) \end{cases} \quad \text{若} \begin{cases} b>a \\ a>b \end{cases}$$

上述定义之必然性：

若 $b>a$，则

$$\begin{aligned} (-a)+b &= (-a)+\big[a+(b-a)\big] \\ &= \big[(-a)+a\big]+(b-a) \\ &= 0+(b-a)=b-a \end{aligned}$$

若 $a>b$ 则

$$\begin{aligned} \big[(-a)+b\big]+(a-b) &= (-a)+\big[b+(a-b)\big] \\ &= (-a)+a=0 \end{aligned}$$

所以 $(-a)+b=-(a-b)$。

(3) 对于任给自然数 a，皆有

$$0\cdot a=a\cdot 0=0, \quad (-1)\cdot a=a\cdot(-1)=-a$$

上述定义之必然性：

$$\begin{aligned} &0\cdot a=(0+0)\cdot a=0\cdot a+0\cdot a \Rightarrow 0\cdot a=0 \\ &0=0\cdot a=\big[1+(-1)\big]\cdot a=1\cdot a+(-1)\cdot a=a+(-1)\cdot a \\ &\Rightarrow (-1)\cdot a=-a \end{aligned}$$

[特例：$(-1)\cdot 1=1\cdot(-1)=-1$]

(4) $(-1)\cdot(-1)=1$

定义之必然性：

$$\begin{aligned}0&=(-1)\cdot 0=(-1)\cdot\big[(-1)+1\big]=(-1)\cdot(-1)+(-1)\cdot 1\\&=(-1)\cdot(-1)+(-1)\quad\Rightarrow(-1)\cdot(-1)=1\end{aligned}$$

(5) 符号定则：$(-a)\cdot b=-a\cdot b$, $(-a)(-b)=a\cdot b$

定义之必然性：

$$\begin{aligned}(-a)\cdot b&=\big[(-1)\cdot a\big]b=(-1)\cdot(a\cdot b)=-a\cdot b\\(-a)\cdot(-b)&=\big[(-1)\cdot a\big]\big[(-1)\cdot b\big]=\big[(-1)(-1)\big](a\cdot b)\\&=1\cdot(a\cdot b)=a\cdot b\end{aligned}$$

总结上面几点分析，可见我们业已熟习的整数系中的正、负数和 0 之间的计算法则，其实乃是能使得整数系的运算依然保持原先的那一套运算律的「唯一可能定义法」（必然性）。当然，我们还得去验证这种唯一的可能定义法是真的能够保有各个运算律的！这一点是很好的习题题材。

【习题】：逐一证明上述所定义的整数系的加乘运算满足加、乘的交换律、结合律和分配律。

0.3 有理数系

除法乃是乘法的逆算：$(a\div b)$ 就是那个乘以 b 後等于 a 的唯一解 $(b\neq 0)$，亦即方程式

$$x\cdot b=a,\quad(b\neq 0)$$

的唯一解定义为 $(a\div b)$。但是在整数系中，上述方程式只有在 b 是 a 的因数（亦即 a 是 b 的倍数）的情形才能「有解」。由此可见，整数系还得要加以适当的扩充才能消除这种不理想的「缺陷」。这也就是由整数系到有理数系的扩张。

【定义】：对于任给整数 a 和 b $(b\neq 0)$ 定义有理数「$\dfrac{a}{b}$」为方程式

$$x\cdot b=a$$

的唯一解；易见它也是 $x \cdot bk = ak$ 的解，所以 $\frac{a}{b} = \frac{ak}{bk}$。

若 $ad = cb$ $(b, d \neq 0)$ 则 $\frac{a}{b} = \frac{ad}{bd} = \frac{cb}{db} = \frac{c}{d}$，反之若 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$，亦即 $x \cdot b = a$ 和 $x \cdot d = c$ 具有同解，所以 $ad = x \cdot bd = (xd)b = cb$。由此可见「$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ 的充要条件」就是 $ad = cb$。

接著让我们来分析一下有理数之间的加法和乘法应该如何定义才能确保有理数系的加乘运算依然保有交换、结合和分配律。

(i)
$$\begin{aligned}\left(\frac{a}{b} + \frac{a'}{b'}\right) \cdot bb' &= \left(\frac{a}{b}\right) \cdot bb' + \left(\frac{a'}{b'}\right)b'b \\ &= ab' + a'b\end{aligned}$$

所以应该如下定义加法：

$$\frac{a}{b} + \frac{a'}{b'} = \frac{ab' + a'b}{bb'} \quad (b, b' \neq 0)$$

(ii) $$\left(\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b'}\right)bb' = \left[\left(\frac{a}{b}\right) \cdot b\right]\left[\left(\frac{a'}{b'}\right) \cdot b'\right] = aa'$$

所以应该如下定义乘法：

$$\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{a'}{b'}\right) = \frac{aa'}{bb'} \quad (b, b' \neq 0)$$

采用上述有理数的加法、乘法定义式和两个有理数的相等检验条件，就容易把有理系的加乘运算律归于整数系的加乘运算律来加以逐一验证。[此事留作习题]

指数定义的推广：设 a, b 是非零整数，n 为正整数，则 $\left(\frac{a}{b}\right)^0$ 定义为 1，$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n}$ 定义为 $\left(\frac{b}{a}\right)^n$。

上述定义是使得指数定则在指数等于整数时恒成立的唯一定义法，即有

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^{m+n} \qquad , m, n \in \mathbb{Z}$$

$$\left[\left(\frac{a}{b}\right)^m\right]^n = \left(\frac{a}{b}\right)^{m \cdot n} \qquad , m, n \in \mathbb{Z}$$

$$\left[\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{c}{d}\right)\right]^m = \left(\frac{a}{b}\right)^m \cdot \left(\frac{c}{d}\right)^m , \quad m \in \mathbb{Z}$$

[注]：以有理数作为指数的定义需要用到实数系的连续性，我们将会在往後的章节系统地研讨其本质。

0.4 实数系

在概念上和研讨方法上，由有理数系到实数系是一个大幅度的跃进。在人类理性文明发展史上，这个跃进发生于纪元前五、四世纪古希腊几何学家在定量几何基础理论的深入研究中，由长度度量而产生的可公度性的问题。在这里我们把 Eudoxus 所创的逼近原理和逼近法，改用现代通用的术语，把从有理数系到实数系的扩张的精要之点，作一简朴明确的叙述。（参看基础几何学之一的 §2.4，这是理性文明一个重大篇章，是引人入胜、启发人深思的一段史话。）

1. 不可公度直线段的发现 (Hippasus)，事实胜于雄辩地证明了简单、初等的有理系是不足以表达任给两个直线段之间的比值的；足以用来表达、研讨长度的度量的数系肯定要包含许多许多那些不可公度的长度比值的非比实数 (irrational numbers)。总之，它是一个比有理数系更大的数系，我们称之为实数系。

2. Eudoxus 的比较原则和逼近原理明确了实数系和有理数系之间的关系，以逼近法用有理数逼近非比数，从而提供了研讨实数系的有效途径。

3. 在当年 Eudoxus 所要研讨的长度度量问题上，比值 $a:b$ 是「原给者」，对于每个 n，他证明存在由 $a:b$ 而定的 m 使得

$$r_n = \frac{m}{n} < a:b < \frac{m+1}{n} = s_n$$

从而构造得 $a:b$ 的一对左、右夹逼数列 $\{r_n\}$ 和 $\{s_n\}$，所以根本没有「存不存在一个被它们所左、右夹逼的实数？」这种存在性问题，因为它就是原给的「$a:b$」！但是在近代数学中，特别是分析学，我们经常会用到以种种方式构造而得的数列，因而讨论它们的极限的存在性问题就自然而然地成为很有其必要了。归根研底，在近代数学中各种各样的存在性定理之所本就是被上述左、右夹逼数列所夹逼者的存在性！

总结上面三点，实数系的发现和理解都和长度度量问题密切关联，而实数系中任何一对左、右夹逼数列都存在有（唯一）一个被它们所夹逼的实数（亦即它们的共同极限）则是直线连续不断的解析描述，称之为实数系的连续性，而它又是近代数学中各种各样存在性定理（例如 Sturm 定理、代数基本定理等等）的证明之所据。再者，实数系是有理数系的一种自然扩张，任何一个实数都能用一对左、右夹逼的有理数数列去唯一地描述它；反之，任给一对左、右夹逼的有理数数列也都描述著一个实数。这样不但简明扼要地刻划了有理数系和实数系之间的关系，而且也提供了用有理数系去研讨实数系的有效途径和方法。

0.5 复数系

在数系的逐步扩张中，不论在概念的跳跃上和所涉及的方法论和技术性上，从有理数系到实数系这一步都是跨得最大也是所涉最为艰巨者。所幸者，实数系和直线段长度度量问题紧密相关，所以其直观性极强，而且是定量几何学上必须充分理解的基础。这也就是为什麽实数系的理解在 Eudoxus 重建定量几何基础理论时业已大体完成。

相比起来，由实数系到复数系这一步实在要简单得多。本质上只是引进一个平方为 -1 的「虚数」单位 i (unit of imaginary number)，然後用简单自然的代数公式定义所有能够表示成 $a+bi,\ a,b\in\mathbb{R}$ 的复数 (complex numbers) 之间的加法和乘法，即

$$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$$
$$(a+bi)\cdot(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$$

很容易用直接验算证明这种扩张的数系 $\mathbb{C}$ 依然满足加、乘的交换律，结合律和分配律。再者，当 a, b 不全为零时

$$(a+bi)\cdot\frac{a-bi}{a^2+b^2}=1$$

所以复数系 $\mathbb{C}$ 在代数方面具有和有理数系 $\mathbb{Q}$、实数系 $\mathbb{R}$ 同样易算好用的运算律。

【历史的注记】：复数的引入，起始于解一元二次方程式：

$$ax^2+bx+c=0$$

在判别式 $b^2-4ac<0$ 时，上述二次方程式无实根。若引进复数，则上述二次方程式的解恒可以公式

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

表示之。但是这种做法并非真正有其必要而且是的确有其心理障碍的，这也就是为什麼把「i」叫做虚数的原因。但是到後来发现解一元三次方程式的公式解中，即使其三个根都是相异实数时，其公式必须通过复数然後再由于表达式中两部分的虚部相消而得其三个实根。这是第一次在数学中显示复数引入的某种必要性。随著心理障碍的逐渐克服和对于复数理解的逐渐增加，它在数学中的用场和重要性也就开始有了长足的进展，例如代数基本定理的证明，复变函数论在十九世纪的蓬勃开展，以及它在电磁学、量子力学所扮演的自然而且基本的角色。复数系已经是理解大自然必不可缺的基本数系了。

第 一 章

实数系和函数的连续性——连续函数的基本性质和定理举例

直线是连续不断的，但是一剪即断，这是几何直观上至为明显者；但是几何直观是不能用来计算或用作分析的。Eudoxus 所创的逼近法和逼近理论，亦即任给左、右夹逼数列总是（唯一）存在著为其所夹逼的实数，则把上述直观几何概念转化为便于讨论的「直线连续性的解析描述」，从而重建定量几何基础理论及创积分法之雏形。本章将以直线（亦即实数系）的连续性为基础，进而研讨函数的连续性 (continuity of functions)。

1.1 实数系的连续性

当年古希腊几何学家们基于「可公度性普遍成立」这个「公设」，对于定量平面几何的重要公式，例如矩形面积公式、毕氏定理和相似三角形定理都给以严格的证明，从而建立起洋洋大观的定量平面几何基础初论。不可公度性的发现 (Hippasus)，使得古希腊的整个几何学界经历了近半世纪的严峻挑战；从全人类的理性文明发展史来看，Hippasus 的发现乃是人类在理解大自然的进程上，第一次触及空间本质中的连续性，它对于当年的几何基础初论而言，则是其所有论证的基本假设的全面否定。因此其所证者，其实只是在可公度的特殊情形的证明，而不可公度的一般情形，则整个理论亟待补证。当年 Eudoxus 就是在这样一个迫切任务的挑战下，促使他首创逼近法 (method of approximation)

来达成几何基础论的重建工程。逼近法的思想简朴精到，它不但是理解连续性和重建几何基础论的有效途径（如今反观，它其实也是唯一的途径），而且其用途广泛深远，乃是整个分析学和数理分析的基本方法，所以 Eudoxus 当年在重建几何基础论的成就，其实也就是分析学的基础和源起之所在！

改用现代的术语来说，Hippasus 的发现使得我们认识到有理数系是不足以表达直线段的长度者，亦即由长度的度量 (measurement of length) 所自然产生的数系——称之为实数系——乃是一个包含有理数系为其真子集的数系，而 Eudoxus 所创的逼近法则是用有理数去理解实数的有效途径。用通常的语句来说，乃是一种以「已知」去理解「未知」、以「简」去御「繁」的具体实践，亦即任给实数皆可用有理数列去逼近之，从而把实数系的研讨，归于其逼近有理数列的研讨。

为了便于往後分析学的研讨，让我们改用现代的数列术语来叙述 Eudoxus 的逼近原理和逼近法：

（一）Eudoxus 比较原则：

当年 Eudoxus 在运用其所创的逼近法去克服不可公度量在当年定量几何基础论所产生的困难时，他充分认识到不可公度的线段比和有理数之间比较大小的原则必须先行明确。前者是有待明确的「未知量」，而後者则是业已熟悉的「已知量」，两者当然不会相等，所以乃是或大、或小的不等关系。由此可见，唯有明确了两者之间比较大小的直观内含之後，才能够运用这种大小关系去以已知研讨未知。此事乃是运用逼近法去研讨各种各样未知量的首务之要。其实，也只有确定了体现其正确的直观内涵的比较原则，才能确保基于这种比较原则，用逼近法所逼近者乃是具有正确直观内含的待定者。例如在研讨不可公度线段比 $\overline{AB}:\overline{A'B'}$ 时，Eudoxus 明确其比较原则为

$$\overline{AB}:\overline{A'B'} \begin{Bmatrix} > \\ < \end{Bmatrix} \frac{m}{n} \Leftrightarrow n\overline{AB} \begin{Bmatrix} > \\ < \end{Bmatrix} m\overline{A'B'} \tag{1.1}$$

（二）Eudoxus 逼近原理：

对于一个给定的不可公度线段比 $\overline{AB}:\overline{A'B'}$ 和任给正整数 N，恒有一个非负整数 m，使得

$$\frac{m}{N} < \overline{AB}:\overline{A'B'} < \frac{m+1}{N} \tag{1.2}$$

改用现代术语，亦即对于任给一个正的非分数 (positive irrational number) λ，恒有一对左、右夹逼的分数数列 $\{a_N\}$ 和 $\{b_N\}$，满足

$$a_N < \lambda < b_N, \quad b_N - a_N = \frac{1}{N} \tag{1.3}$$

（三）Eudoxus 等量定义和唯一性：

当年 Eudoxus 对于两对不可公度的线段比 $\lambda = \overline{AB} : \overline{A'B'}$ 和 $\mu = \overline{AC} : \overline{A'C'}$ 相等的定义乃是两者和所有分数 $\{\frac{m}{n}\}$ 都具有同样的大小关系。改用现代术语表达，亦即下述熟知的唯一性：若 λ 的上述左、右夹逼数列也是 μ 的左、右夹逼数列，即

$$a_N < \begin{Bmatrix} \lambda \\ \mu \end{Bmatrix} < b_N, \quad b_N - a_N = \frac{1}{N} \tag{1.4}$$

对于所有正整数 N 恒成立，则 $\lambda = \mu$。上述唯一性的要点在于 $b_N - a_N$ 在 N 无限增大时可以小到任意小，而 λ 和 μ 所可能有的差别，即 $|\lambda - \mu|$，总是要比 $b_N - a_N$ 要小者也，所以它必须是零（亦即 $\lambda = \mu$）。以现代的观点和术语来描述：任给实数 λ 皆可用一对左、右夹逼分数数列 $\{a_N\}$ 和 $\{b_N\}$ 来加以刻划，它们之间的关系是

$$a_1 \leq \ldots \leq a_N \leq a_{N+1} \leq \ldots \leq \lambda \leq \ldots \leq b_{N+1} \leq b_N \leq \ldots \leq b_1 \tag{1.5}$$

而且 $(b_N - a_N) \to 0$（小到任意小）。通常以符号 $a_N \to \lambda \leftarrow b_N$ 表达之。再者，因为 $(b_N - a_N) \to 0$ 所以被满足上述条件的一对数列 $\{a_N\}$ 和 $\{b_N\}$ 所左、右夹逼者是唯一的，亦即

$$a_N \to \lambda \leftarrow b_N \ \text{和}\ a_N \to \mu \leftarrow b_N \ \Rightarrow\ \lambda = \mu \tag{1.6}$$

（四）左、右夹逼数列的「被夹逼者」的存在性和直线的连续性：

相对于一对左、右夹逼数列（亦即 $\{a_N\}$ 递增，$\{b_N\}$ 递减，而且 $a_N < b_N$, $(b_N - a_N) \to 0$ 者）之「被夹逼者」的唯一性，当然还可以探讨其存在性的意义何在？在当年 Eudoxus 为了重建几何基础论的研讨中，其所用的夹逼数列乃是为了夹逼一个已给的不可公度线段比而造构者，所以是「有的造矢」，其存在性当然不成问题，而他所要用者则是其「唯一性」。到了现代的分析学，逼近法的应用的范畴和

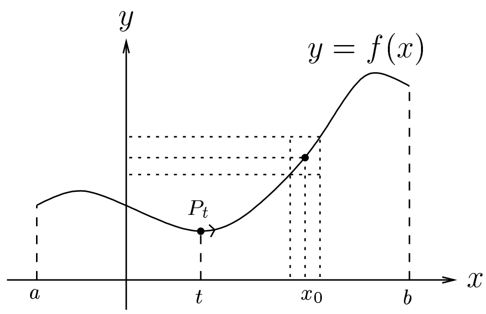
用法大为扩展和深化，其中就自然而然会遇到确立某种构造而得的夹逼数列的「被夹逼者」的存在性问题。归根究底，这种存在性的确立（亦即论证之）当然要有所本（证明是不可能无中生有的！）；而分析学中各种各样存在性定理之所本就是下述最为简朴基本的存在性，亦即：

「任给一对左、右夹逼数列 $\{a_N\}$ 和 $\{b_N\}$，
恒存在著被其所夹逼的实数。」

在此，也许有人会问：「为什麼？」对于上述问题的恰当回答并非是「设法加以论证」。因为这种「挖空心思」的论证，其所本者很可能还比不上所证者的直观性和简朴性，岂非画蛇添足!? 总之，上述问题的恰当回答乃是直截了当地明确上述存在性的直观内含乃是直线是连续不断的连续性 (the continuity of a straight line)。我们对于一条直线的几何直观是：它本身是连续不断的，但是一剪即断。一条直线 ℓ 上任给一点 P 把直线分隔成不连通的两段。由此可见，一条直线是不能缺掉其中任何一点的，否则直线就不是连续不断的了，是不？归根究底，上述存在性的「否定」的直观内含就是缺掉夹逼于其间的那个点（亦即直线具有切断点是也），所以上述存在性的肯定乃是直线的连续性的解析描述（亦即数量化，确切化），通常把它叫做实数系的连续性 (continuity of real number system)。它是整个分析学的一个重要基石，是所有分析学的存在性定理的论证依据。我们将在往後的章节中逐步逐样解说逼近法和连续性在数理分析中既深且广的用场。

1.2 连续函数的基本概念

首先，让我们先来分析一下函数的连续性的直观内含和应该如何赋以明确的定义。用函数 $y = f(x)$ 的图象的几何直观来说，$f(x)$ 在一个区间 $[a, b]$ 上的连续性也就是其图象乃是一条「连续不断」的曲线。如[图 1–1] 所示，它可以看成一个动点 $P(t, f(t))$ 在时间由 $t = a$ 到 $t = b$ 所经过的轨迹，当 $x = t$ 作微小的变动时，$y = f(t)$ 也只能作微小的变动。



[图 1–1]

把上述直观内含局部化到一个取定点 x_0 的微小邻近来看，亦即：「$f(x)$ 和 $f(x_0)$ 的差别是可以小到任意小的，只要 x 和 x_0 的差别小到足够小」。改用数学语句来说，即为：

「对于任给 $\varepsilon > 0$，恒有 $\delta > 0$ 使得

$$|x - x_0| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon」$$

其实，这也就是 $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ 的定义是也。

【定义】（函数连续性）：函数 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 点连续的定义就是 $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$；$f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 之上连续的定义乃是 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 之中的每一点 x_0 都是连续的（亦即在 $[a, b]$ 上到处连续）。

我们也可以改用数列术语来叙述 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 之上的连续性，即：

设 $\{s_n\}$ 是一个取值于 $f(x)$ 的定义区间 $[a, b]$ 之中的数列，而且 $\lim_{n\to\infty} s_n = \lambda$，则恒有

$$\lim_{n\to\infty} f(s_n) = f(\lambda), \quad \text{亦即} \quad \lim_{n\to\infty} f(s_n) = f(\lim_{n\to\infty} s_n) \tag{1.7}$$

[注一]：一个函数 $f(x)$ 在一个给定点 x_0 的连续性乃是上述极限式对于所有以 x_0 为其极限值的数列皆成立。由此可见，一个函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 之上的连续性乃是上述局部化的连续性对于 $[a, b]$ 之中的每一点皆成立，其所包含的条件是非常庞大的。

[注二]：自然界各种各样的动态事物，其变动的常态是逐渐的改变，亦即连续地改变，所以描述它们的参变量之间的函数往往自然而然地是

连续函数。当然也会有某些特殊的临界情况，会出现不连续的改变，其相应的函数就会出现不连续的「奇点」(singularity)。

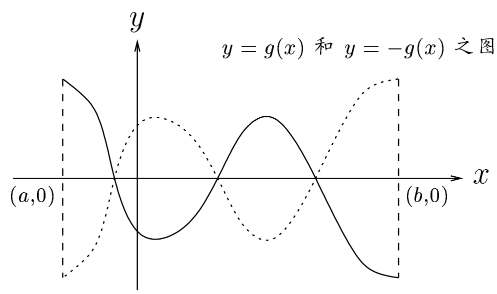
接著让我们研讨在闭区间 $[a,b]$ 之上的连续函数所具有的某些基本性质，它们在分析学的基础理论中扮演著重要的角色。

【定理 1.1】（中间值定理）：设 $f(x)$ 是在 $[a,b]$ 之上连续的函数，而 c 是介乎于 $f(a)$ 和 $f(b)$ 之间的任给实数，则至少存在一个 a,b 之间的点 x_0 使得 $f(x_0)=c$。

证明：令 $g(x)=f(x)-c$，则由上所设

$$g(a)\cdot g(b)=(f(a)-c)\cdot(f(b)-c)<0 \tag{1.8}$$

而我们所要证明者就是存在 $a<x_0<b$ 使得 $g(x_0)=0$。由 $g(x)$ 的图象来看，它是一条端点（即 $(a,g(a))$ 和 $(b,g(b))$）分居于 x–轴的两侧的一条连续曲线。从几何直观上是可以想到它必须和 x–轴至少有一个交点。



[图 1–2]

首先，我们要认清上述存在性的证明自然要用到实数系连续性的解析描述，即那个左、右夹逼数列「所夹逼者」的存在性。而下述证法也就是利用 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 之上的连续性和 $g(a)\cdot g(b)<0$ 去构造一对左、右夹逼数列 $\{a_n\}\to\leftarrow\{b_n\}$，使得其所夹逼者 x_0 就是所求者，亦即 $g(x_0)=0$。

以 $[a,b]$ 的中点 $\frac{1}{2}(a+b)$ 把 $[a,b]$ 二等分成左、右两段。若 $g(\frac{1}{2}(a+b))=0$ 则定理业已得证。不然，则 $g(\frac{1}{2}(a+b))\neq 0$ 必然和异号的 $\{g(a),g(b)\}$ 中之一异号，因此必有一个半段 $[a_1,b_1]$ 依然满足 $\{g(a_1),g(b_1)\}$ 异号者。如此逐次二等分（不妨设每次的分点都不是 $g(x)$ 的零点），每次总是

由 $[a_n, b_n]$ 取其半段 $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ 使得 $\{g(a_{n+1}), g(b_{n+1})\}$ 依然保持异号。这样就构造而得一对左、右夹逼数列 $\{a_n\} \to\leftarrow \{b_n\}$，它具有

$$g(a_n) \cdot g(b_n) < 0 \quad \text{对于所有 } n \text{ 成立} \tag{1.9}$$

在此，由实数系的连续性即得它们所夹逼者的存在性，令其为 x_0，亦即

$$\lim_{n\to\infty} a_n = x_0 = \lim_{n\to\infty} b_n \tag{1.10}$$

再者，由 $g(x)$ 的连续性和 (1.9)–式即有

$$\begin{aligned} 0 \geq & \lim_{n\to\infty} g(a_n) \cdot g(b_n) = \lim_{n\to\infty} g(a_n) \cdot \lim_{n\to\infty} g(b_n) = g(x_0) \cdot g(x_0) \\ & \Rightarrow g(x_0) = 0 \end{aligned} \tag{1.11}$$

□

【定义】：一个定义于区间 $[a, b]$ 上的函数 $f(x)$，若其值恒小于或等于一个给定常数 K，则称之谓上有界者 (bounded above)，而 K 则是 $\{f(x), a \leq x \leq b\}$ 的一个上界，亦即

$$f(x) \leq K, \quad a \leq x \leq b \tag{1.12}$$

若把上式的 "$\leq K$" 改为 "$\geq K$" 恒成立，则称 K 为 $\{f(x), a \leq x \leq b\}$ 的一个下界，而 $f(x)$ 则为下有界者 (bounded below)。

上、下均有界者，通常简称为有界者 (bounded)。

【引理 1.1】：设 $f(x)$ 为 $[a, b]$ 上的一个连续函数，则 $f(x)$ 是有界者。

证明：上有界性和下有界性的证明本质完全一样，我们将用反证法来证明其上有界性。

设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 之上没有上界。将 $[a, b]$ 等分为两个半段，则 $f(x)$ 至少在一个半段上没有上界。如此逐次二等分，每次取其半段，依然保持 $f(x)$ 在其上是没有上界者，这样就构造而得一对左、右夹逼数列 $\{a_n\} \to\leftarrow \{b_n\}$，使得 $f(x)$ 在 $[a_n, b_n]$ 之上是没有上界的。在此，再用实数系的连续性得知存在被其所夹逼的 x_0，亦即

$$\lim_{n\to\infty} a_n = x_0 = \lim_{n\to\infty} b_n \tag{1.13}$$

亦即在 x_0 的任意小的邻近 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$, $\delta>0$，总是包含著一个 n 足够大的 $[a_n, b_n]$。

一方面由 $f(x)$ 在 x_0 点的局部化连续性得知当 δ 足够小时

$$|x-x_0|<\delta \ \Rightarrow\ |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon \tag{1.14}$$

所以 $f(x)$ 在 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 之上显然是有界的，所以在它的子区间 $[a_n, b_n]$ 之上当然也是有界的。但是另一方面，由上述 $\{a_n\}\rightarrow\leftarrow\{b_n\}$ 的构造法，我们一直保持著 $f(x)$ 在 $[a_n, b_n]$ 上的无上界性。两者显然矛盾，这也就证明原本的假设和 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 之上的连续性是互相矛盾的，所以 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 之上是有界的。 □

【引理 1.2】：设 $\mathcal{S}$ 是一个有上界的非空实数子集，则在其所有上界之中，必有其最小者，称之谓 $\mathcal{S}$ 的极小上界。同理，设 $\mathcal{S}$ 是一个有下界的非空实数子集，则在其所有下界之中，必有其最大者，称之谓 $\mathcal{S}$ 的极大下界。

证明：若 $\mathcal{S}$ 中有一个极大者 s_0（或极小者 s_0'）则它显然就是 $\mathcal{S}$ 的极小上界（或极大下界）。所以我们不妨在下述证明中设 $\mathcal{S}$ 中没有极大者（或极小者）。

设 K_1 是 $\mathcal{S}$ 的一个上界，k_1 是 $\mathcal{S}$ 的非上界（亦即至少具有一个大于 k_1 的 $s\in\mathcal{S}$）。将 $[k_1, K_1]$ 等分为两段，选取其半段 $[k_2, K_2]$ 满足 K_2 为 $\mathcal{S}$ 的上界而 k_2 则并非 $\mathcal{S}$ 的上界。如此逐次两分，每次由 $[k_n, K_n]$ 选取其半段 $[k_{n+1}, K_{n+1}]$，使得 K_{n+1} 和 k_{n+1} 分别保持其 $\mathcal{S}$ 的上界性和非上界性。如此即得一对左、右夹逼数列 $\{k_n\}\rightarrow\leftarrow\{K_n\}$。不难验证它们所夹逼者，就是 $\mathcal{S}$ 极小上界。 □

【定理 1.2】（极小值、极大值存在定理）：设 $f(x)$ 为 $[a,b]$ 之上的一个连续函数，则 $[a,b]$ 之中存在 $\hat{x}_0$ 和 $\overset{\vee}{x}_0$ 使得

$$f(\overset{\vee}{x}_0)\le f(x)\le f(\hat{x}_0) \tag{1.15}$$

对于所有 $a\le x\le b$ 恒成立。

证明：由[引理 1.1]得知 $\mathcal{S}=\{f(x), a\le x\le b\}$ 是有界的。再由[引理 1.2]得知 $\mathcal{S}$ 分别具有其极小上界和极大下界，以 M 和 m 记之。而

本定理所要证明者乃是在 $[a,b]$ 之中分别存在 $\hat{x}_0$ 和 $\overset{\vee}{x}_0$ 使得 $f(\hat{x}_0) = M$, $f(\overset{\vee}{x}_0) = m$。其证法依然是用二分法去分别构造两对左、右夹逼数列 $\{a_n\} \to\leftarrow \{b_n\}$ 和 $\{a'_n\} \to\leftarrow \{b'_n\}$，其所夹逼者分别是所求证其存在性的 $\hat{x}_0$ 和 $\overset{\vee}{x}_0$。其逐步归纳构造法则分别如下：

设 $\mathcal{S} = \mathcal{S}' \cup \mathcal{S}''$ 是一个有界实数集，则在 $\mathcal{S}'$ 和 $\mathcal{S}''$ 之中至少有其一，它的极小上界（或极大下界）和 $\mathcal{S}$ 的极小上界（或极大下界）相同。基于上述简单事实我们可以逐步归纳地由 $[a_n, b_n]$ 和 $[a'_n, b'_n]$ 分别取其半段为 $[a_{n+1}, b_{n+1}]$（及 $[a'_{n+1}, b'_{n+1}]$）使得 $f(x)$ 在 $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ 上（及 $[a'_{n+1}, b'_{n+1}]$ 上）的极小上界（及极大下界）依然是 M（及 m）。

令 $\hat{x}_0$（及 $\overset{\vee}{x}_0$）分别是 $\{a_n\} \to\leftarrow \{b_n\}$（及 $\{a'_n\} \to\leftarrow \{b'_n\}$）所左、右夹逼者。不难用 $f(x)$ 在 $\hat{x}_0$（及 $\overset{\vee}{x}_0$）的局部化连续性结合上述所构造的 $[a_n, b_n]$ 和 $[a'_n, b'_n]$ 的性质验证 $f(\hat{x}_0) = M$ 及 $f(\overset{\vee}{x}_0) = m$。
[其验证留作习题] □

均匀连续性：

在一个给定函数 $f(x)$ 的局部化逐点连续性的解析描述中，那个足够小的 $\delta > 0$ 使得

$$|x - x_0| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \tag{1.16}$$

是随著 $\varepsilon > 0$ 和给定点 x_0 的取定而定的。一般来说，对于同一 $\varepsilon > 0$，在 x_0 点业已足够小的 δ 对另外一点 x'_0 就可能不够小。是否能够选取一个仅仅随著 $\varepsilon > 0$ 而定的 $\delta > 0$，它对于 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 之上每一点的局部化连续性都足够小呢？亦即是否对于任给 $\varepsilon > 0$，总是有一个足够小的 $\delta > 0$，使得

$$|x_1 - x_2| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon \tag{1.17}$$

能够对于所有 $x_1, x_2 \in [a,b]$ 均成立呢？这种比较划一的连续性叫做均匀连续性 (uniform continuity)。

【定理 1.3】：设 $f(x)$ 是一个在 $[a,b]$ 上的连续函数，则它也是在 $[a,b]$ 上均匀连续的。

证明：我们将用反证法，亦即由上述命题的「否定命题」出发，运用 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的连续性和实数系连续性去推导矛盾。为此，我们得先将其否定命题的逻辑内含加以明确：

$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上并非均匀连续者，乃是存在有一个 $\varepsilon_0 > 0$ 使得不论 $\delta > 0$ 有多麼小，在 $[a,b]$ 之中总会有一对相距小于 δ 的 $\{x_1, x_2\}$，使得 $|f(x_1) - f(x_2)| > \varepsilon_0$。

我们把上述命题以「$P(\varepsilon_0)$ 在 $[a,b]$ 上成立」简称之。

把 $[a,b]$ 等分为两段，则其中至少有一个半段 $[a_1, b_1]$ 使得 $P(\varepsilon_0)$ 依然在 $[a_1, b_1]$ 上成立。假若不然，亦即有一个足够小的 δ 使得

$$|x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon_0 \tag{1.18}$$

对于 $\{x_1, x_2\}$ 同在前半段或同在後半段时皆成立。再者，由 $f(x)$ 在分点 $\frac{1}{2}(a+b)$ 的连续性，即有另一个足够小的 $\delta' > 0$ 使得

$$\left|x - \frac{1}{2}(a+b)\right| < \delta' \Rightarrow \left|f(x) - f(\frac{1}{2}(a+b))\right| < \frac{\varepsilon_0}{2} \tag{1.19}$$

不妨设 $\delta \le \delta'$。因此当 x_1, x_2 分居于前、後半段时，亦有

$$\begin{aligned} &\left|x_1 - \frac{1}{2}(a+b)\right| < \delta \le \delta', \quad \left|x_2 - \frac{1}{2}(a+b)\right| < \delta \le \delta' \\ \Rightarrow\ &|f(x_1) - f(x_2)| \le \left|f(x_1) - f(\frac{1}{2}(a+b))\right| + \left|f(x_2) - f(\frac{1}{2}(a+b))\right| \\ &\qquad < \frac{\varepsilon_0}{2} + \frac{\varepsilon_0}{2} = \varepsilon_0 \end{aligned}$$

所以和 $P(\varepsilon_0)$ 在 $[a,b]$ 上成立的假设相矛盾。由此可见 $P(\varepsilon_0)$ 至少在一个半段 $[a_1, b_1]$ 上成立，而且我们可以逐次二等分，每次选取其中半段 $[a_n, b_n]$，依然保持 $P(\varepsilon_0)$ 在 $[a_n, b_n]$ 成立。这样，就构造而得一对左、右夹逼数列 $\{a_n\} \to\leftarrow \{b_n\}$, $P(\varepsilon_0)$ 在所有 $[a_n, b_n]$ 上皆成立。由实数系连续性，存在著它们所夹逼的 x_0。由 $f(x)$ 在 x_0 点连续性即有一个足够小的 δ 使得

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon_0}{2} \tag{1.20}$$

再者，当 n 足够大时，显然有 $[a_n, b_n] \subset (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$。因此

$$\begin{aligned} & x_1, x_2 \in [a_n, b_n] \Rightarrow |x_1 - x_0| < \delta, \quad |x_2 - x_0| < \delta \\ \Rightarrow \ & |f(x_1) - f(x_2)| \le |f(x_1) - f(x_0)| + |f(x_2) - f(x_0)| \\ & < \frac{\varepsilon_0}{2} + \frac{\varepsilon_0}{2} = \varepsilon_0 \end{aligned}$$

显然和所构造的 $P(\varepsilon_0)$ 在 $[a_n, b_n]$ 成立相矛盾。归根研底，上述矛盾证明了原始假设 $P(\varepsilon_0)$ 在 $[a, b]$ 上成立乃是不能成立的。这也就证明了 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的均匀连续性。 □

1.3 多项式函数

在各种各样函数之中，最为简朴者首推多项式函数。一个给定的多项式函数 $f(x)$，其在 a 点的函数值可以由所给的代数式直接计算而得。再者，一个多项式 $f(x)$ 在 a 点邻近的局部性质的研讨是非常简单明了的。我们可以用替换 $x = a + t$ 把它改写成 t 的升幂多项式，亦即

$$f(x) = f(a+t) = f(a) + c_1 t + c_2 t^2 + \ldots + c_n t^n \tag{1.21}$$

其中 $|t|$ 是足够小者，因而右侧各项的绝对值乃是随著次数的升高而大幅缩小，因此它们的局部影响力显然是高次项要远小于低次项，可以说乃是「阶段分明，一目了然」者也。由此可见，要研究一般函数在 a 点邻近的局部性质的一个好办法就是设法用多项式函数去局部逼近它，从而把所给函数在 a 点的局部性质的研讨，归于其局部逼近多项式的局部性质而研讨之。其实，这也就是「微分学」的基本思想！本节先将对多项式的常用基本性质作一简要论述。（参看基础代数学第一、二、三章的讨论。）

1.3.1 多项式的唯一性定理与插值公式

由熟知的简易公式

$$(x^k - a^k) = (x - a)(x^{k-1} + a x^{k-2} + \ldots + a^{k-1}) \tag{1.22}$$

易证 $f(x)-f(a)$ 含有 $(x-a)$ 因式。设

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n} c_k x^k \tag{1.23}$$

则有

$$\begin{aligned} f(x)-f(a) &= \sum_{k=1}^{n} c_k(x^k-a^k) \\ &= (x-a)\sum_{k=1}^{n} c_k(x^{k-1}+ax^{k-2}+\ldots+a^{k-1}) \\ &= (x-a)q(x,a) \end{aligned} \tag{1.24}$$

[注]：由 (1.24)–式易见

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a} q(x,a)=q(a,a)=\sum_{k=1}^{n} c_k(ka^{k-1}) \tag{1.25}$$

【定理 1.4】：一个 n 次多项式 $f(x)$ 至多只有 n 个相异的根。再者，一个 n 次多项式由其在（相异的）$(n+1)$ 点之值所唯一确定。

证明：(i) 用归纳法易证：当 $\{a_i, 1\le i\le \ell\}$ 是 $f(x)$ 的 ℓ 个相异之根，则

$$f(x)=(x-a_1)\ldots(x-a_\ell)Q(x)$$

所以当 $\ell=n$ 时，

$$f(x)=c_n(x-a_1)\ldots(x-a_n)$$

显然任何和 $\{a_i, 1\le i\le n\}$ 都不同的 a_{n+1} 不可能使得 $f(a_{n+1})=0$，因为

$$f(a_{n+1})=c_n(a_{n+1}-a_1)\ldots(a_{n+1}-a_n)$$

乃是 $(n+1)$ 个非零者的乘积，也一定是非零的。

(ii) 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都是次数至多为 n 的多项式，而且它们在相异的 $(n+1)$ 个点 $\{a_j, 0\le j\le n\}$ 上取相同之值，则 $f(x)$ 和 $g(x)$ 必须是同一个多项式。假若不然，则 $(f(x)-g(x))$ 乃是一个次数至多为 n 的多项

式，而由所设它至少有 $(n+1)$ 个相异的根 $\{b_j, 0 \le j \le n\}$，此事和 (i) 中所证矛盾。 □

<u>插值问题和插值公式</u>：

既然一个次数至多为 n 的多项式 $f(x)$ 业已由它在 $(n+1)$ 个取定点 $\{a_j, 0 \le j \le n\}$ 之值所唯一确定，自然就会问下述存在性问题：

【插值问题】：设 $\{a_j, 0 \le j \le n\}$ 是任给 $(n+1)$ 个相异之点，$\{v_j, 0 \le j \le n\}$ 是任给（不一定相异）之值。是否存在一个次数至多为 n 的多项式 $f(x)$ 使得

$$f(a_j) = v_j, \quad 0 \le j \le n \tag{1.26}$$

由中国古算中韩信点兵法的启示，我们应该先行求解 $\{v_j\}$ 之中只有一个是 1 而其他皆为零的情形，例如 $v_0 = 1, v_1 = v_2 = \ldots = v_n = 0$。由 [定理 1.4]，这个所求的 $f_0(x)$ 可以表达成

$$f_0(x) = c(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n) \tag{1.27}$$

而且

$$1 = f_0(a_0) = c(a_0-a_1)(a_0-a_2)\ldots(a_0-a_n) \tag{1.27$'$}$$

所以

$$f_0(x) = \prod_{j=1}^{n}(x-a_j) \Big/ \prod_{j=1}^{n}(a_0-a_j) \tag{1.28}$$

同理，那个满足 $f_k(a_k) = 1$ 而且 $f_k(a_j) = 0, j \ne k,$ 者即为

$$f_k(x) = \prod_{j\ne k}(x-a_j) \Big/ \prod_{j\ne k}(a_k-a_j) \tag{1.29}$$

至此，我们所求的一般公式业已呼之欲出的了。只要用分配律就可看出

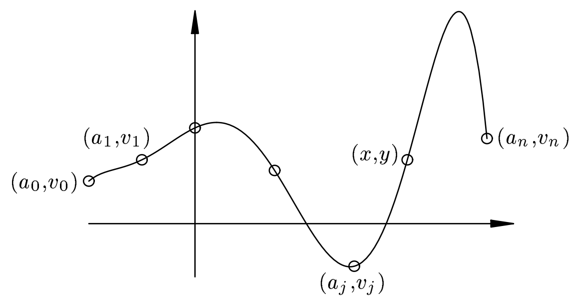
$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} v_k f_k(x) \tag{1.30}$$

显然就是那个所求者，因为 $f_k(a_j)$ 中只有 $f_j(a_j)=1$，其他皆为 0，亦即

$$f(a_j)=\sum_{k=0}^{n} v_k f_k(a_j) = v_j f_j(a_j) = v_j \tag{1.31}$$

这也就是 Lagrange 插值公式，它其实就是韩信点兵法的直接推广。

让我们再用函数的图象的观点来研讨上述插值问题，则所求者乃是 $(n+1)$ 个待定系数 $\{c_k, 0\le k\le n\}$ 使得 $y=f(x)=\sum_{k=0}^{n} c_k x^k$ 的图象过 $(n+1)$ 个给定点 $\{(a_j,v_j), 0\le j\le n\}$。



[图 1–3]

设 (x,y) 是 $y=f(x)$ 图象曲线上任意一点，则有下列 $\{c_k, 0\le k\le n\}$ 的条件方程组

$$\begin{aligned} -y+\sum_{k=0}^{n} x^k c_k &= 0 \\ -v_j+\sum_{k=0}^{n} a_j^k c_k &= 0, \quad 0\le j\le n \end{aligned} \tag{1.32}$$

把它们想成以下述 $(n+2)\times(n+2)$ 方阵为其系数矩阵的齐次线性方程组

$$\begin{pmatrix} -y & 1 & x & \dots & x^n \\ -v_0 & 1 & a_0 & \dots & a_0^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -v_j & 1 & a_j & \dots & a_j^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -v_n & 1 & a_n & \dots & a_n^n \end{pmatrix} \tag{1.32'}$$

则它具有非零解 $(-1, c_0, \ldots c_n)$ 的充要条件就是上述方阵的行列式等于 0，亦即

$$\begin{vmatrix} -y & 1 & x & \ldots & x^n \\ -v_0 & 1 & a_0 & \ldots & a_0^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -v_j & 1 & a_j & \ldots & a_j^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -v_n & 1 & a_n & \ldots & a_n^n \end{vmatrix} = 0 \tag{1.33}$$

把上述行列式以第一列 (first column) 展开，遍除以 $(-y)$ 的系数子行列式，再用熟知的 Vandermonde 行列式公式即得回 Lagrange 公式

$$-y + \sum_{k=0}^{n} v_k f_k(x) = 0 \tag{1.30}$$

所以 (1.33) 和 (1.30) 是相通的两种插值公式。

1.3.2 单元多项式的除法与辗转相除求公因式

设 k 是一个在四则运算上满足和有理数系（或实数系、复数系）同样的运算律的体系，通常称之谓域 (field)。令 $k[x]$ 是所有以 k 中的元素为系数的多项式所组成的代数体系，通常称之谓 k 上的单元多项式环 (polynomial ring over k)，它具有熟知的加法和乘法，而且满足常用的运算律例如加、乘的结合律与交换律，乘对于加的分配律等等。总之，$k[x]$ 在加和乘上和整数系在加和乘上具有十分相似的运算律。再者，$k[x]$ 也具有和整数系类似的带馀除式，亦即

【引理 1.3】：设 $f(x), g(x)$ 是 $k[x]$ 中任给一对多项式，$g(x) \neq 0$，则存在唯一的商式 $q(x)$ 和馀式 $r(x)$ 使得

$$f(x) = q(x) \cdot g(x) + r(x) \tag{1.34}$$

而且 $r(x)$ 的次数低于 $g(x)$ 的次数，或 $r(x) \equiv 0$。

[注意]：非零常数的次数为 0，但是零多项式的次数则定义为 $-\infty$。唯有如此定义，通用的公式

$$\deg(p(x) \cdot q(x)) = \deg p(x) + \deg q(x) \tag{1.35}$$

才得以普遍成立。

证明：设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的次数分别是 n 和 m。

若 $n < m$，则 $q(x) = 0, r(x) = f(x)$。

若 $n = m$，则 $q(x) = \frac{a_0}{b_0}, r(x) = f(x) - \frac{a_0}{b_0}g(x)$，其中 a_0x^n 和 b_0x^m 分别是 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的首项。

若 $n > m$，则易见

$$f_1(x) = f(x) - \frac{a_0}{b_0}x^{n-m} \cdot g(x) \tag{1.36}$$

的次数低于 n，所以即可对 n 归纳证之。 □

【定理 1.5】：设 $d(x)$ 是 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的最高公因式，则存在 $k[x]$ 中适当的 $A(x)$ 和 $B(x)$ 使得

$$d(x) = A(x)f(x) + B(x)g(x) \tag{1.37}$$

证明：在整数系的情形，我们有熟知的辗转相除求两个给定整数 m, n 的最大公约数。同样的，在 $k[x]$ 中也有同样的辗转相除求两个给定多项式 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的最高公因式，(1.37)–式乃是这样求法的直接推论。因为逐次所得的馀式总是可以表达成 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的倍式之和者也，例如

$$\begin{aligned} r_1(x) &= 1 \cdot f(x) + (-q_1(x)) \cdot g(x) \\ r_2(x) &= 1 \cdot g(x) + (-q_2(x)) \cdot r_1(x) \\ &= (-q_2(x))f(x) + (1 + q_1(x)q_2(x))g(x) \quad \text{等等} \end{aligned} \tag{1.38}$$

□

【定义】：若 $f(x)$ 含有因式 $(x-a)^2$，则称 a 为 $f(x)$ 的一个重根 (multiple root)。

易见 a 是 $f(x)$ 的重根的充要条件是 $f(a) = 0$ 而且 $Df(a) = 0$。

【定义】：若 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的最高公因式 $d(x)$ 次数是 0，则称 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是互素的 (relatively prime)。

【推论】：设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是互素的，而且

$$\deg h(x) < \deg f(x) + \deg g(x) \tag{1.39}$$

则存在唯一的一组 $p(x)$ 和 $q(x)$，使得

$$\frac{h(x)}{f(x)\cdot g(x)}=\frac{p(x)}{f(x)}+\frac{q(x)}{g(x)} \tag{1.40}$$

而且 $\deg p(x)<\deg f(x), \deg q(x)<\deg g(x)$。

证明：由所设，1 可以表达成 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的倍式之和，即有 $A(x)$ 和 $B(x)$ 使得

$$1=A(x)f(x)+B(x)g(x) \tag{1.41}$$

两边同乘以 $h(x)$，即得

$$h(x)=(h(x)A(x))f(x)+(h(x)B(x))g(x) \tag{1.42}$$

令 $p(x)$ 为 $h(x)B(x)$ 被 $f(x)$ 除的馀式，亦即

$$h(x)B(x)=C(x)f(x)+p(x),\quad \deg p(x)<\deg f(x) \tag{1.43}$$

令 $q(x)=h(x)A(x)+C(x)g(x)$，则有

$$h(x)=q(x)f(x)+p(x)g(x),\quad \deg q(x)<\deg g(x) \tag{1.44}$$

这也就证明了满足 (1.40)–式的 $\{p(x),q(x)\}$ 的存在性。再者，它们的唯一性乃是 $f(x)$ 和 $g(x)$ 互素和 $\deg p(x)<\deg f(x), \deg q(x)<\deg g(x)$ 的直接推论。 □

1.3.3 Sturm 定理

设 $f(x)$ 是一个实系数多项式，$[a,b]$ 是一个给定区间。是否有一个有效能算的判定法，可以确定 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 中实根的个数（不计重数）？这是在整个实系数多项式理论及应用上一个至关重要的基本问题。本节所证明的 Sturm 定理，提供了上述基本问题的完美解答。

若 $f(x)$ 含有重根，则其重根都含于 $f(x)$ 和 $Df(x)$ 的最高公因式 $d(x)$ 之中，而且 $\tilde{f}(x)=f(x)/d(x)$ 含有和 $f(x)$ 同样的根，但是不含重根。所以在研讨上述问题时不妨设 $f(x)$ 和 $Df(x)$ 互素。令 $f_0(x)=f(x)$,

$f_1(x) = Df(x)$ 然後由 $f_0(x)$, $f_1(x)$ 的辗转相除，求得下述一串「馀式」$f_2(x), f_3(x), \cdots, f_k(x)$，即有

$$\begin{aligned} f_0(x) &= q_1(x)f_1(x) - f_2(x) \\ f_1(x) &= q_2(x)f_2(x) - f_3(x) \\ \vdots \quad & \quad \vdots \qquad\quad \vdots \\ f_{k-2}(x) &= q_{k-1}(x)f_{k-1}(x) - f_k(x) \end{aligned}$$

注意：上述除式中的馀式带有负号，所以 $f_2(x), f_3(x), \cdots, f_k(x)$ 乃是通常的辗转相除中所得的馀式再乘以 (-1)。再者由所设 $f_0(x)$ 和 $f_1(x)$ 互素，所以 $f_k(x)$ 其实是一个非零常数。

上述函数串 $\{f_0(x), f_1(x), f_2(x), \cdots, f_k(x)\}$ 叫做 Sturm 函数串。

【定理 1.6】（Sturm 定理）：$f(x)$ 在区间 (a, b) 之内的根的个数等于 $V(a) - V(b)$，其中 $V(a)$ 和 $V(b)$ 分别是下列数串

$$\{f_0(a), f_1(a), f_2(a), \cdots, f_k(a)\} \text{ 和 } \{f_0(b), f_1(b), f_2(b), \cdots, f_k(b)\} \tag{1.45}$$

的变号数。

[注]：对于任给一数 c，不可能有相邻的 $f_i(c)$ 和 $f_{i+1}(c)$ 同时为 0。不然，则由上述除式即可逐步推导得 $f_j(c) = 0$, $i \le j \le k$，但是 $f_k(x)$ 是一个非零常数！再者，设有 $f_i(c) = 0$, $0 < i < k$，则由除式可见 $f_{i-1}(c) = -f_{i+1}(c) \neq 0$。所以不论把 $f_i(c)$ 想成 $+$ 或 $-$，数串 $\{f_i(c), 0 \le i \le k\}$ 的变号数是一样的。由此可见在 c 不是 $f(x)$ 的一个根时，即使 $\{f_i(c)\}$ 中含有为零者 $V(c)$ 也是唯一确定的。

证明：若区间 $[c_1, c_2]$ 中不含有任何 $f_i(x)$ 的根 $0 \le i \le k$，则由中间值定理可知 $f_i(c_1)$ 和 $f_i(c_2)$, $0 \le i \le k$，每一对皆为同号。因此 $V(c_1)$ 当然和 $V(c_2)$ 相同。

(i) 设 c 是其中一个 $f_i(x)$, $0 < i < k$ 的根。则有 $f_{i-1}(c) = -f_{i+1}(c) \neq 0$ 是异号的。再者，在 $\delta > 0$ 取得足够小时，$f_{i-1}(c \pm \delta)$ 和 $f_{i-1}(c)$ 同号，$f_{i+1}(c \pm \delta)$ 和 $f_{i+1}(c)$ 同号，所以 $f_{i-1}(c \pm \delta)$ 和 $f_{i+1}(c \pm \delta)$ 异号，如下图

表所示

	$c-\delta$	c	$c+\delta$
f_{i-1}	$\pm$	$\pm$	$\pm$
f_i	$+$ 或 $-$	0	$+$ 或 $-$
f_{i+1}	$\mp$	$\mp$	$\mp$

不论 $f_i(c\pm\delta)$ 的正、负，在 $\{f_{i-1}, f_i, f_{i+1}\}$ 这一段所含的变号数总是 1。

(ii) 设 c 是 $f_0(x) = f(x)$ 的一个根。则由无重根之所设 $f_1(c) = Df(c) \neq 0$，而且在 $\delta > 0$ 取得足够小时，$f_1(x)$ 在区间 $[c-\delta, c+\delta]$ 上保持其正、负不变，亦即 $f_0(x) = f(x)$ 在 $[c-\delta, c+\delta]$ 上保持其递增、递减性不变。由此可见，$\{f_0, f_1\}$ 在 $[c-\delta, c+\delta]$ 上的符号如下表所示：

	$c-\delta$	c	$c+\delta$
f_0	$\mp$	0	$\pm$
f_1	$\pm$	$\pm$	$\pm$

由上表可见 $\{f_0, f_1\}$ 这一段所含的变号数在 c 的左侧为 1 但是在 c 的右侧则是 0。

总结上面对于变号数的逐段局部分析如下：

设区间 $[a,b]$ 中 $f(x)$ 的根的个数为 k，它们把 $[a,b]$ 分割成 $(k+1)$ 个区间，在每一分段上变号数 V 保持不变，但是从 $f(x)$ 的一个根的左侧到其右侧，则变号数 V 减 1。这也就证明了

$$V(b) = V(a) - k$$

亦即

$$k = V(a) - V(b)$$

□

1.3.4 代数基本定理

在实数系的范围中，一个像 x^2+1 这样简单的多项式已经是没有它的根了。当年把实数系扩充到复数系 $\mathbb{C} = \{x+iy,\ x, y \in \mathbb{R}\}$ 至少使得所有二次方程式都有复数解，接著发现所有三次、四次方程式的根也都已

经在复数范围之内。很自然会问，是否任何高次方程式的根也都在复数系之内呢？还是会有些高次方程式在复数系中依然无解呢？是耶非耶，这就是当年 Euler 和 Lagrange 他们想解答的一个代数学基本问题。其答案是任何高次复系数多项式都存在有复数根，然後很容易用馀式定理归纳地证明它的所有根都已经在复数系之中。这就是高斯 (Gauss) 在 1799 年于他的博士论文中所证明的代数基本定理 (Fundamental Theorem of Algebra)。

这个定理有好几个不同的证法。下面所给者是一个比较初等而且证明中所涉的步骤又是十分简朴直观的证法。当 $f(z)$ 是一次多项式时，定理显然成立，所以我们设 $f(z)$ 的次数最少为 2。

令 $F(z)=|f(z)|^2=f(z)\cdot\overline{f(z)}\,(\geq 0)$, $z=x+iy$。则 $F(z)$ 可以想成一个二元连续函数，亦即当 $a_n\to x_0, b_n\to y_0$（亦即 $a_n+ib_n\to x_0+iy_0$）则恒有 $F(a_n+ib_n)\to F(x_0+iy_0)$。

把 F 的变域限制到下述方块之上

$$\square(2K,2K)=\{(x,y),|x|\leq K,|y|\leq K\} \tag{1.46}$$

我们将用实数系的连续性去证明 F 在 $\square(2K,2K)$ 的函数值中有一个极小值，亦即存在 $\square(2K,2K)$ 中一点 (x_0,y_0) 使得

$$F(x_0,y_0)\leq F(x,y),\quad (x,y)\in\square(2K,2K) \tag{1.47}$$

恒成立。

[设想]：假如 $\square(2K,2K)$ 业已大到包括我们所要证明其存在的 $f(z)$ 的一个根的话，则上述极小值必须是 0，而 x_0+iy_0 就是 $f(z)$ 的一个根。由此可见，代数基本定理证明的要点在于论证当 K 足够大时，上述极小值必须等于 0。

【引理 1.4】：F 在 $\square(2K,2K)$ 上的所有函数值中，存在有一个极小值，亦即存在 $(x_0,y_0)\in\square(2K,2K)$ 使得

$$F(x_0,y_0)\leq F(x,y) \tag{1.48}$$

对所有 $|x|\leq K, |y|\leq K$ 皆成立。

<u>证明</u>：令 $\mathcal{S}$ 为 F 在 $\square(2K,2K)$ 上所取的所有函数值所成的集合。以 $g.l.b.(\mathcal{S})$ 表示 $\mathcal{S}$ 的<u>极大下界</u>。

[注意]：一个具有下界的实数子集 $\mathcal{S}$ 总是有一个极大下界的（参看[引理 1.1]及[引理 1.2]），但是这个 $\mathcal{S}$ 的极大下界却<u>不一定</u>属于 $\mathcal{S}$；若属于 $\mathcal{S}$，则它当然就是 $\mathcal{S}$ 的极小者。

把 $\square(2K,2K)$ 等分成四个 $\square(K,K)$（每个都包含其边界）。令 $\mathcal{S}_i$ 是函数 F 在各别方块上函数值的集合，$i=1,2,3,4$。因为 $\mathcal{S}$ 的极大下界等于 $\mathcal{S}_i$ 的极大下界之中的最小者，所以至少有一个 $\mathcal{S}_i$ 的极大下界等于 $\mathcal{S}$ 的极大下界。设其所相应的方块是 $\square_1$，我们又可以把 $\square_1$ 等分成四个方块而选取其中之一 $\square_2$，使得 F 在 $\square_2$ 上的函数值的极大下界等于 F 在 $\square(2K,2K)$ 上的函数值极大下界。如此逐步四等分，而每次选择其中之一，使得 F 在其上函数值的极大下界依然和 F 在 $\square(2K,2K)$ 上者<u>相等</u>，这样就得到「方块列」

$$\square(2K,2K)\supset\square_1\supset\square_2\supset\cdots\supset\square_n\supset\square_{n+1}\supset\cdots \tag{1.49}$$

F 在 $\square_n$ 上的函数值的极大下界一直和 F 在 $\square(2K,2K)$ 上者相等。再者，由上述逐次四等分然後选取其中之一这种几何构造法，可见有两对左、右夹逼实数数列 $\{a_n\}\rightarrow\leftarrow\{b_n\}$ 和 $\{c_n\}\rightarrow\leftarrow\{d_n\}$ 使得

$$\square_n=\{(x,y);\, a_n\le x\le b_n,\, c_n\le y\le d_n\} \tag{1.50}$$

在此，我们运用实数系的连续性即得

$$\lim_{n\to\infty}a_n=x_0=\lim_{n\to\infty}b_n \quad \text{和} \quad \lim_{n\to\infty}c_n=y_0=\lim_{n\to\infty}d_n \tag{1.51}$$

然後，再用 F 的连续性去证明

$$F(x_0,y_0)=g.l.b.(\mathcal{S}) \tag{1.52}$$

所以 $F(x_0,y_0)$ 是 $\mathcal{S}$ 中的极小者。我们将用反证法来证明 (1.52)–式。假若不然，令

$$F(x_0,y_0)-g.l.b.(\mathcal{S})=2\varepsilon \tag{1.53}$$

则用 F 在 (x_0, y_0) 点的连续性，即有一个足够小的 $\delta > 0$，使得

$$(1.54)\qquad |x - x_0| < \delta,\ |y - y_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |F(x,y) - F(x_0,y_0)| < \varepsilon$$

再者，当 n 足够大时，即有

$$(1.55)\qquad |a_n - x_0|,\ |b_n - x_0|,\ |c_n - y_0|,\ |d_n - y_0|$$

四者都小于 δ，亦即整个 $\square_n$ 都包含在

$$(1.56)\qquad |x - x_0| < \delta \ \text{和}\ |y - y_0| < \delta$$

这个方块之内，所以 F 在 $\square_n$ 上的函数值都大于

$$(1.57)\qquad F(x_0, y_0) - \varepsilon = g.l.b.(\mathcal{S}) + \varepsilon$$

这显然和 $\square_n$ 的选取是使得 F 在其上函数值的极大下界等于 $g.l.b.(\mathcal{S})$ 相矛盾。所以 $F(x_0, y_0)$ 必须等于 $g.l.b.(\mathcal{S})$，亦即 $F(x_0, y_0)$ 就是 F 在 $\square(2K, 2K)$ 上的<u>极小值</u>。 □

<u>注意</u>：在上述证明中，其实仅仅用到 F 的连续性和 F 的下界性（即 $F \geq 0$）。

在代数基本定理的证明中，不妨设 $f(z)$ 的首项系数为 1。

【引理 1.5】：令 $f(z) = z^n + c_1 z^{n-1} + c_2 z^{n-2} + \cdots + c_n$ 及

$$\begin{aligned} M &= \text{Max}\,\{|c_i|,\, 1 \leq i \leq n\} \\ K &> 2(M+2) \end{aligned}$$

则 $|f(z)|$ 的极小值不能够取值于 $\square(2K, 2K)$ 的边界之上。

<u>证明</u>：当我们把 z 限制在 $\square(2K, 2K)$ 的边界上时，

$$\begin{aligned} |f(z)| &= |z|^n \cdot \left|1 + c_1 \frac{1}{z} + \cdots + c_n \frac{1}{z^n}\right| \\ &\geq |z|^n \big\{1 - M\big(\frac{1}{|z|} + \cdots + \frac{1}{|z|^n}\big)\big\} \\ &\geq K^n \big\{1 - \frac{M}{2M+3}\big\} \\ &\geq [2(M+2)]^n \cdot \frac{M+3}{2M+3} > |c_n| = |f(0)| \end{aligned}$$

由此可见 F 在 $\square(2K,2K)$ 上的极小点 (x_0,y_0) 不可能位于其边界之上，亦即 (x_0,y_0) 必定是一个内点。 $\square$

【引理 1.6】：当 $|f(z)|$ 在 $\square(2K,2K)$ 上的极小值发生于 $\square(2K,2K)$ 的一个内点 $z_0=x_0+iy_0$ 时，即有 $|f(z_0)|=0$，亦即 $f(z_0)=0$。

证明：我们将用反证法，设 $f(z_0)=w_0\neq 0$ 然後去证明一定有 $\square(2K,2K)$ 中的另外一点 z_1 使得 $|f(z_1)|<|f(z_0)|$。

因为 z_0 是 $\square(2K,2K)$ 的一个内点。所以以 z_0 为圆心的一个足够小半径的圆依然位于 $\square(2K,2K)$ 之内。其上之点可以表成

$$z=z_0+\rho(\cos\theta+i\sin\theta),\quad \rho \text{ 是半径}$$

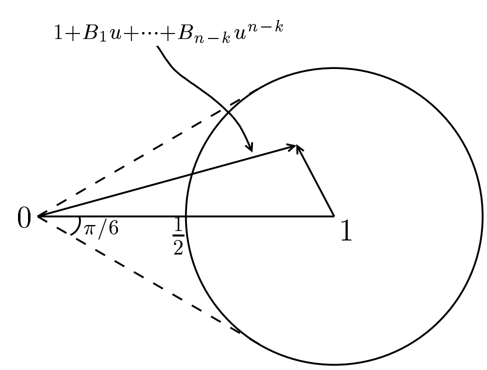
再者，以 $z=z_0+u$ 代入 $f(z)$ 然後再以 u 的升幂表达，即有

$$f(z)=f(z_0)+A\cdot u^k\{1+B_1u+B_2u^2+\cdots+B_{n-k}u^{n-k}\} \tag{1.58}$$

令 $M'=\mathrm{Max}\,\{|B_i|,1\leq i\leq n-k\}$，取 $\rho<\dfrac{1}{2(M'+2)}$，则有

$$\begin{aligned}&\left|B_1u+B_2u^2+\cdots B_{n-k}u^{n-k}\right|,\quad u=\rho(\cos\theta+i\sin\theta)\\ &\leq M'\cdot\{\rho+\rho^2+\cdots+\rho^{n-k}\}\\ &\leq \frac{M'}{2M'+3}<\frac{1}{2}\end{aligned} \tag{1.59}$$

由 [图 1–4] 可见 $\{1+B_1u+\cdots+B_{n-k}u^{n-k}\}$ 的幅角 φ 必然介于 $\pm\dfrac{\pi}{6}$ 之间：



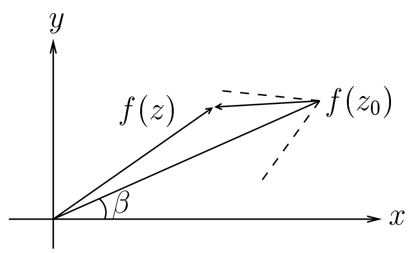
[图 1–4]

设 A 的幅角为 α，则

$$Au^k \cdot \{1 + B_1 u + \cdots + B_{n-k} u^{n-k}\}, \quad u = \rho(\cos\theta + i\sin\theta) \tag{1.60}$$

的幅角等于

$$\alpha + k\theta + \varphi, \quad |\varphi| \le \frac{\pi}{6} \tag{1.61}$$



[图 1–5]

设 $f(z_0)$ 的幅角为 β。取

$$\theta = \frac{\pi + \beta - \alpha}{k} \tag{1.62}$$

则有

$$\alpha + k\theta + \varphi = \pi + \beta + \varphi, \quad |\varphi| \le \frac{\pi}{6} \tag{1.63}$$

由 [图 1–5] 易见 $f(z) - f(z_0)$ 的方向必定夹在 $\pi + \beta \pm \frac{\pi}{6}$ 之间，所以 $|f(z)| < |f(z_0)|$，和所设 $|f(z_0)|$ 是极小者相矛盾。这也就证明了 $|f(z_0)|$ 必须是 0，亦即 z_0 乃是 $f(z)$ 的一个根！ □

【定理 1.7】（代数基本定理, Fundamental Theorem of Algebra）：任何一个非常数复系数的多项式 $f(z)$ 都必定有一个零点，亦即存在 $z_0 \in \mathbb{C}$ 使得 $f(z_0) = 0$。

【推论 1】：任给一个 n 次复系数多项式 $f(x) \in \mathbb{C}[x]$ 都可以分解成 n 个复系数一次因式之乘积。

【推论 2】：任给一个 n 次实系数多项式 $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ 都可以分解成一次或二次实系数多项式的乘积。

关于连续性教学的探讨：

连续性是整个分析学的基础之所在。但是长期以来，连续性却一直是分析学在学与教上的难点所在，亟待改进。本章对于实数系和函数的连续性先作一次返璞归真、探本究源的分析。实数系的发现与产生，起源于古希腊定量几何基础论对于长度的度量的深入研讨。由 Hippasus 不可公度性的发现，到 Eudoxus 引入长度的比较原则和逼近法达成定量几何基础论之重建这一段引人入胜的史话，理当是每一位学习、理解连续性的後之来者自然的入门和坦途。由此即可顺理成章地认识到左、右夹逼数列的「被夹逼者」的存在性实乃直线「连续不断但一剪就断」这种直观明显的特性的解析描述，故称之谓实数的连续性，它是其他各种各样存在定理论证之所本！

有鉴于「理在用中方知妙」这个认知上的规律，学习、理解连续性当然要从它的各种各样的用场和用法中逐步体会，加深认识。本章所讨论的闭线段上的连续函数的几个基本定理和实变多项函数的 Sturm 定理及复变多项函数的代数基本定理，它们不但是连续性的重要用场，而且其证明则又是学会连续性的用法的自然途径。

为了便于读者体认连续性的用法，本章对于上述这几个具有基本重要性的定理的证法，力求简朴、划一；基本上可以归于两种：其一是直截了当地由所设去构造那个所要证明其存在性的左、右夹逼数列，从而由实数的连续性直接推论所要证的存在性（例如[定理 1.1]和[定理 1.2]的证明）。其二是采用反证法，我们由其否定命题出发，去构造一个左、右夹逼数列，使得其所夹逼之点和所设矛盾（例如[引理 1.1]和[定理 1.3]的证明）。再者，在两种情况，其左、右夹逼数列的构造法基本上都可以用二分（或四分）逼近法去达成。

【例题与习题】：

I. 二分法与连续性之配合使用：

如上所述，本章在运用实数连续性来证明各种各样存在性定理时，基本上可以分为采取直接证法和反证法这样两种途径。但是不论采用前者或後者，在连续性的运用上总是采用二分逼近法去构造论证所需的左、右夹逼数列。对它们所用的二分逼近构造法略加分析，即可归纳出下述「通法」：若有一种闭线段上的性质 P 具有下述「继承性」

，亦即当把具有性质 P 的一个闭线段等分成两段，则其中至少有一个半线段依然具有性质 P。由此即可逐次二分，每次取其依然保有性质 P 的半段。这样就按保有性质 P 为准则，构造而得逐次减半的闭线段列 $\{[a_n, b_n]\}$，它们的端点 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 乃是某一个实数 λ 的左、右夹逼数列，即 $a_n \to \lambda \leftarrow b_n$。易见如此所得的 λ 的任意小邻域，即对任给 $\delta > 0, (\lambda - \delta, \lambda + \delta)$ 总是包含著足够大 n 的闭线段 $[a_n, b_n]$ 于其中。

由此可见，在运用二分逼近法和连续性去论证某种存在性定理时，如何选择适当的具有继承性的 P 乃是要点之所在。

【习题一】：试分析本章中各定理论证中所用的性质 P，逐一列述之。

II. 逼近和数列极限：

在 Eudoxus 首创逼近法时，他用分数 $\frac{m}{n}$ 和 $\frac{m+1}{n}$ 去左、右夹逼一个给定的不可公度比 $a:b$。用现代的术语来说，其所用的 $\frac{m}{n}$ 和 $\frac{m+1}{n}$ 乃是 $a:b$ 的一对近似值 (approximate values)，把所要逼近者 $a:b$ 左、右夹逼于其间。因为两者之差是 $\frac{1}{n}$，所以两者和 $a:b$ 的差别显然都小于 $\frac{1}{n}$。当 n 无限增大时，上述逐次求得的近似值构成两个数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$，它们始终把所要逼近者夹逼于其间，而 $b_n - a_n$ 又可以小到任意小，从而用夹逼数列唯一地确定了所要逼近者。用现代的术语来说，它就是两个夹逼数列的共同极限值是也。由此可见，逼近和极限乃是同一件事情的两面。若业已给定一个有待明确或研讨者（例如不可公度比 $a:b$，或一个给定函数在某点的变率，或某一区间上的积分等等），我们设法用一系列比较简单明了的「近似值」去逼近它，从而化未知为已知，这就是逼近法。反之，若由某种构造业已给出一个数列 $\{a_n\}$，我们要去确立是否存在著一个被其所无限逼近者（亦即极限值），这就是极限 (Limit)。所以逼近和极限实乃同一事物的两面，但是出发点和著重点是不同的。前者的要点在于其极限值的唯一性，而後者的要点则在于其极限值的存在性。下述几个习题，乃是关于数列极限的存在性的检验上常用的基本工具。它们的证明当然又得运用实数系连续性，所以它们的证明和第三节的几个证法大同小异，乃是同学们练习体会这种简朴自然的证法的好地方。

数列极限之定义：当 n 无限增大，数列 $\{a_n\}$ 趋于某一定值 λ 为极限乃是当 n 足够大时，$|a_n - \lambda|$ 可以小到任意小。其逻辑叙述即为：对于任

给 $\varepsilon > 0$ 皆有足够大之 N 使得 $n > N$ 时 $|a_n - \lambda| < \varepsilon$.

【习题二】：

(1) 试证：一个递增上有界的数列 $\{a_n\}$ 的极限恒存在。同理，一个递减下有界的数列 $\{b_n\}$ 的极限恒存在。

[注]：前者的极限值实乃 $\mathcal{S} = \{a_n\}$ 的极小上界，而後者的极限值实乃 $\mathcal{S}' = \{b_n\}$ 的极大下界。所以上述存在性的证明基本上就是[引理二]的证明。

(2) 试证一个具有极限值的数列 $\{a_n\}$ 必然是有界的。（所以其各项所成的集合 $\mathcal{S}$ 具有其极小上界和极大下界。）

(3) 设 $\{a_n\}$ 是一个上、下有界的数列。令 $\mathcal{S}_k = \{a_n, n \geq k\}$，而 M_k 和 m_k 分别是 $\mathcal{S}_k$ 的极小上界和极大下界。试证 $\{M_k\}$ 和 $\{m_k\}$ 分别是递减和递增的数列，而且

$$m_1 \leq \ldots \leq m_k \leq m_{k+1} \leq \ldots \leq M_{k+1} \leq M_k \leq \ldots \leq M_1$$

(4) 结合习题 (1) 和 (3) 的结果得知 $\lim_{k\to\infty} m_k$ 和 $\lim_{k\to\infty} M_k$ 皆存在而且 $\lim_{k\to\infty} m_k \leq \lim_{k\to\infty} M_k$。试证 $\lim_{k\to\infty} m_k = \lim_{k\to\infty} M_k$ 乃是 $\lim_{n\to\infty} a_n$ 的存在性的充要条件。

[注]：通常称 $\lim_{k\to\infty} m_k$ 为数列 $\{a_n\}$ 的 $\liminf$，而 $\lim_{k\to\infty} M_k$ 则称之为 $\{a_n\}$ 的 $\limsup$.

(5) 设 $\{a_n\}$ 是一个上、下有界的数列，则可取其适当的子数列 $\{a_{n_i}\}$ 其极限值为 $\liminf\{a_n\}$（或 $\limsup\{a_n\}$）。

(6) 若数列 $\{a_n\}$ 满足条件：

给定实数 $\varepsilon > 0$，恒存在正整数 N 使得
当 $n, m \geq N$ 时，恒有 $|a_n - a_m| < \varepsilon$

则称之为满足 Cauchy 条件的数列，或 Cauchy 数列。试证 Cauchy 条件乃是 $\lim_{n\to\infty} a_n$ 的存在性的充要条件。

(7) 令 $a_n = (1+\frac{1}{n})^n$, $b_n = (1+\frac{1}{n})^{n+1}$。试证 $\{a_n\}$ 为递增数列，$\{b_n\}$ 为递减数列，而且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$。

(8) 设 a 是一个大于 1 的给定实数，n 是一个大于 1 的给定整数，试证存在唯一的正实数 x_0，记为 $\sqrt[n]{a}$，它的 n 次方等于 a。

(9) 试证 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$。

(10) 试证 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$。

(11) 试用习题 (5) 的结果给出[定理 1.3]的另一种证明。

第 二 章

微积分——微分与积分的直观内涵与基础理论

微积分的基础和基本方法就是定量几何基础论中开始认识的实数系连续性和 Eudoxus 所首创的逼近原理与方法。再者，积分的想法及其几何学中的应用的范例，业已在 Eudoxus 求锥体体积，Archimedes 在求球面面积和刘徽、祖暅在求球体体积等工作中充分体现。但微分的想法则一直到了 Kepler 研究行星运行，解析几何中求切线斜率 (Descartes, Fermat) 才逐渐展现。总之，微积分学乃是上千年世代相承，逐步演进而得的成果，及至十七世纪後半，业已水到渠成，由 Newton 和 Leibniz 分别从两种观点集成其初步的体系者也（通常常有 Newton 和 Leibniz 创造微积分这种流传，乃是和史实有相当差距的）。

2.1 变率与微分

从数理分析的观点来说，一个变动的事物或现象，含有各种各样的参变量 (parameters)，而其所含的诸多参变量之间又具有相互关联的关系 (interlocking relationships)。其中最为简单而且基本的关系乃是两个参变量 $\{x, y\}$，後者随著前者之取定而唯一确定的关系，我们通常把这种最为简单基本的关系叫做 y 是 x 的一个函数。例如一个圆的面积乃是其半径的函数，即 $A = \pi r^2$；一个球的体积乃是其半径的函数，即 $V = \frac{4\pi}{3} r^3$，等等。由此可见，微积分学的基本题材就是一个实变数 x 的各种各样函数的基本性质。例如：

(i) $y = ax^2 + bx + c$, $y = x^3 - 5x + 6, \ldots$ 等等 y 可以用 x 的一个多项式加以表达的多项式函数（包括常数函数 $y = c$ 为其特例）。

(ii) $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \tan x$ 等三角函数。

(iii) 一个在 x–轴上以等速 c 行进的动点 P，其 x–坐标乃是时间 t 的函数，即 $x = a + ct$，其中 a 是起点的坐标。

(iv) 以 $(1, 0)$ 为起点在单位圆上作单位角速度的运动可以用下述一对函数表达之，即

$$x = \cos t, \quad y = \sin t$$

(v) 一个在空间运动之点 P，其 x, y, z–坐标分别都是时间 t 的函数，即

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad z = f_3(t)$$

由此可见，一个点在空间的运动可以由上述三个时间的函数所组成者描述之。

概括地来说，一个函数 $y = f(x)$ (或 $x = g(t)$) 所描述者，乃是一个变数的值如何随著另一个变数的变化而变化的方式。例如例–(iii) 中的 $x = a + ct$，当 t 由 t_1 变到 t_2 时，x 的值由 $a + ct_1$ 变到 $a + ct_2$，其中「t 的改变」是 $(t_2 - t_1)$，而相应的「x 的改变」则是

$$(a + ct_2) - (a + ct_1) = c \cdot (t_2 - t_1)$$

两者的比值就是上述直线等速运动的速度 c。从函数的观点来说，上述简单的事实就是：

一个一次多项式函数 $y = a + mx$，其应变数 y 的改变恒等于其自变数 x 的改变的 m 倍，亦即

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{(a + mx_2) - (a + mx_1)}{x_2 - x_1} \equiv m$$

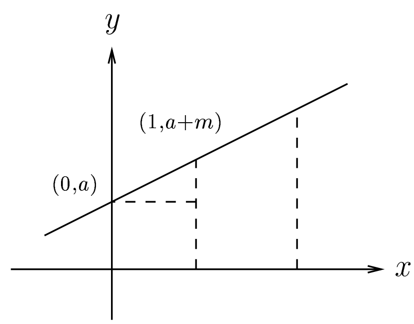
称之谓：<u>其变率恒等于 m</u>。反之，设 $y = f(x)$ 的变率恒等于 m，亦即

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = m$$

对于任何非零的 x 恒成立，则有

$$y = f(x) = f(0) + mx$$

若用图象来表现上述一次多项式函数，则其图象乃是一条斜率为 m, y–轴的截距为 $a = f(0)$ 的直线：



[图 2–1]

当 $y = f(x)$ 不是一次多项式函数时（例如 $y = x^2$, $y = \sin x$ 等等），$(f(x_2) - f(x_1))$ 和 $(x_2 - x_1)$ 的比值是随著 (x_2, x_1) 的不同而有所不同的。我们应该如何把此类函数在某一点的「变率」赋以恰当的定义呢？在此，我们大可效法 Eudoxus 的做法，即运用逼近思想来达成以简御繁，以「已知」去理解「未知」，亦即以已知的一次函数的变率去夹逼一个给定的非一次函数在某一给定点的有待定义的「变率」。首先我们得探讨一个合乎变率的直观内含的比较原则。

设有甲、乙两人在一条公路上作自行车竞赛，分别以 $f(t)$ 和 $g(t)$ 表示甲、乙在 t–秒後和起点的距离。设甲在 $t = t_0$ 时从後赶上乙而且超越之，亦即在 t 略小于 t_0 时，甲在乙之後，但是在 t 略大于 t_0 时，则甲在乙之前。则甲在 $t = t_0$ 时的「速率」显然不能小于乙者。[要不然，则甲是不可能在 $t = t_0$ 时达成後来居上的，是不？]

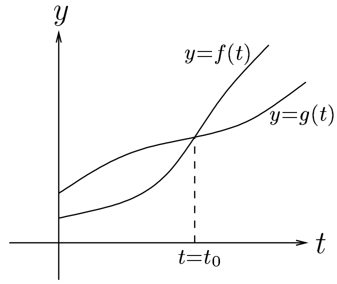
把上述直观上十分明显的事实，改用函数框架叙述之，即为下述刻划变率的直观内含的比较原则：

【函数变率的比较原则】(Comparison principle of rate of change)：

设有两个函数 $f(t)$ 和 $g(t)$，在 $t=t_0$ 的邻近具有下述大小关系，即对于任给足够小的 $\delta>0$,

$$\begin{aligned} &f(t_0-\delta)<g(t_0-\delta) \\ &f(t_0+\delta)>g(t_0+\delta) \qquad \text{（参见 [图 2–2]）} \\ \text{而且}\quad &f(t_0)=g(t_0) \end{aligned}$$

则 $f(t)$ 在 t_0 点的「变率」就不小于 $g(t)$ 在 t_0 点的「变率」。



[图 2–2]

【例 1】：让我们且以 $f(t)=ct^n, n\geq 2$ 为例，用上述比较原则去研讨它在 $t=a$ 点的变率应该是什麼。因为一次函数的变率乃是已知者，我们可以把 $f(t)$ 和 $g(t)=ca^n+m(t-a)$ 来作比较。令 $t=a+\delta$，则有

$$\begin{aligned} f(t) &= c(a+\delta)^n = ca^n + nca^{n-1}\delta + \frac{n(n-1)}{2}ca^{n-2}\delta^2 + \ldots + c\delta^n \\ g(t) &= ca^n + m\delta \\ f(t)-g(t) &= (nca^{n-1}-m)\delta + \delta^2\Big[\frac{n(n-1)}{2}ca^{n-2} + \ldots + c\delta^{n-2}\Big] \end{aligned}$$

由此不难看到，当 $(nca^{n-1}-m)\neq 0$ 时，只要把 $|\delta|$ 取得足够小，则 $(f(t)-g(t))$ 和 $(nca^{n-1}-m)\delta$ 同号。所以由比较原则即有

$$m>nca^{n-1} \Rightarrow f(t) \text{ 在 } t=a \text{ 点的变率 } <m$$
$$m<nca^{n-1} \Rightarrow f(t) \text{ 在 } t=a \text{ 点的变率 } >m$$

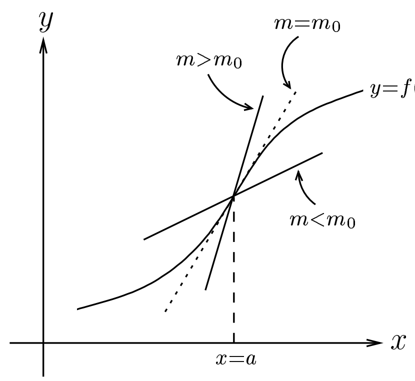
所以「$f(t)$ 在 $t=a$ 点的变率」唯有定义为 nca^{n-1} 才合乎上述比较原则。

【例 2】：设有函数 $y=f(x)$，它在 $x=a$ 的邻近和一次函数 $g(x)=f(a)+m(x-a)$ 相比，满足下列不等式，即存在有一个数 m_0，当

$m > m_0$（及 $m < m_0$），δ 是足够小的正值时分别有下述比较关系（如[图 2–3] 所示）：

$$\begin{aligned} m > m_0: \quad & f(a-\delta) > g(a-\delta),\ f(a+\delta) < g(a+\delta) \\ m < m_0: \quad & f(a-\delta) < g(a-\delta),\ f(a+\delta) > g(a+\delta) \end{aligned}$$

则由变率比较原则可得 $f(x)$ 在 $x = a$ 的变率不大于任何比 m_0 大者，而又不小于任何比 m_0 小者，因此它应该等于 m_0！



[图 2–3]

【变率的定义】：当函数 $y = f(x)$ 在 $x = a$ 的邻近满足[例 2]和一次函数的比较关系时，我们定义其在 $x = a$ 点的变率为 m_0。不然，则称其在 $x = a$ 点的变率是<u>不定义</u> (undefined)。

【符号】：把一个给定函数 $y = f(x)$ 在其变率有定义之点的变率逐一记录，即得一个由 $f(x)$ 引导而得的新函数，通常以 $y' = f'(x)$ 记号之，称其为 $y = f(x)$ 的<u>导函数</u> (derivative)。[注意，导函数 $f'(x)$ 的定义域乃是 $f(x)$ 的定义域之中，那些变率有定义之点所构成的子集。它有可能是一个真子集，甚至在某些例子是一个空集。]

【例 3】：当 $f(x) = cx^n$ 时，$f'(x) = ncx^{n-1}$。

<u>变率与极限</u>：

对于一个给定函数 $f(x)$ 在某一定点 $x = a$ 的变率这个微分学的基本概念，我们采取了概念上探本究源的分析。先认识到一次函数乃是变率恒为常数的「简朴已知者」，然後再由变率的直观内涵的分析认清了变率的比较原则，最後再把两者结合起来，得出具有直观上的必然

性的「变率定义」。通过这样一种返璞归真的分析来探讨「变率」这个基本概念所应有的定义，其好处是一来使得定义的直观内含充分展现，唯有这样做才能真正体现定义的必然性和自然性，二来也使得读者有一次在基本概念层面上探索求知的体验。但是这种纯概念性的变率的定义，还要略加转换，使得它便于计算。

[分析]：

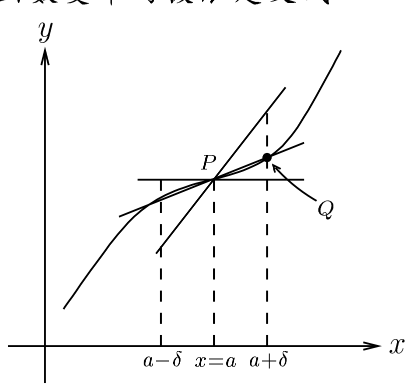
设 $y=f(x)$ 是一个满足[例 2]中所述的和一次函数的比较关系的函数，$\varepsilon>0$ 是一个任给的正数。则存在一个足够小的 $\delta>0$，使得 $y=f(x)$ 在 $|x-a|<\delta$ 之上的图象夹逼于过 P 点而斜率分别为 $m_0\pm\varepsilon$ 的直线之间，如 [图 2–4] 所示。亦即

$$m_0-\varepsilon<\frac{f(a+h)-f(a)}{h}<m_0+\varepsilon$$

对于任给 $|h|<\delta$ 皆成立。改用极限的术语，也就是

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=m_0$$

这也就是便于计算的函数变率的极限定义式。



[图 2–4]

由 [图 2–4] 可见，$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ 的几何意义乃是割线 PQ 的斜率，而 m_0 则是图象 $y=f(x)$ 在 P 点切线的斜率。

【例 4】：$f(x)=cx^n$

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=nca^{n-1}+h\Big[\frac{n(n-1)}{2}ca^{n-2}+\ldots+ch^{n-2}\Big]$$

所以 $\lim_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}=nca^{n-1}$。

【例 5】：$f_1(x)=\sin x,\ f_2(x)=\cos x$，则有

$$f_1'(x)=\cos x,\quad f_2'(x)=-\sin x$$

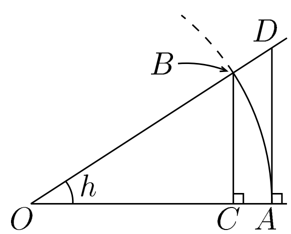
证明：由 $\sin x, \cos x$ 的和角公式易得

$$\begin{aligned}\frac{\sin(a+h)-\sin a}{h}&=\frac{\sin a(\cos h-1)}{h}+\frac{\cos a\sin h}{h}\\ \frac{\cos(a+h)-\cos a}{h}&=\frac{\cos a(\cos h-1)}{h}-\frac{\sin a\sin h}{h}\end{aligned}$$

因此，我们只需要在此补证下述两个基本极限，即

【引理 2.1】：$\lim_{h\to 0}\dfrac{\sin h}{h}=1,\ \lim_{h\to 0}\dfrac{\cos h-1}{h}=0$

证明：



[图 2–5]

如 [图 2–5] 所示，扇形 OAB 的面积是 $\frac{1}{2}h$, $\triangle OCB$ 的面积是 $\frac{1}{2}\sin h\cos h$, $\triangle OAD$ 的面积是 $\frac{1}{2}\tan h$。所以有下述不等式：

$$\frac{1}{2}\sin h\cos h<\frac{1}{2}h<\frac{1}{2}\tan h=\frac{1}{2}\frac{\sin h}{\cos h}$$

由此即得：

$$\cos h<\frac{\sin h}{h}<\frac{1}{\cos h}=\sec h$$

当 $h\to 0$ 时，$\cos h\to 1, \sec h\to 1$。所以上述始终夹逼于 $\cos h$ 和 $\sec h$ 之间者，即 $\frac{\sin h}{h}$，也必然趋于 1 为其极限，亦即已证得：

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}=1$$

再者，

$$\begin{aligned}\frac{\cos h-1}{h}=\frac{\cos^2 h-1}{h(\cos h+1)}&=\frac{-\sin^2 h}{h(\cos h+1)}\\&=-\frac{\sin h}{h}\cdot\frac{\sin h}{1+\cos h}\end{aligned}$$

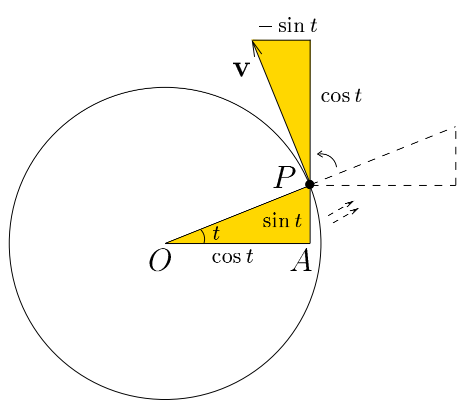
所以

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{\cos h-1}{h}&=\lim_{h\to 0}\left(-\frac{\sin h}{h}\right)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{1+\cos h}\\&=-1\cdot 0=0\end{aligned}$$

□

【例 6】：在[例 6]的两个公式，其实还可以用一个具有物理意义的方法来证明的。当动点 P 在单位圆 $x^2+y^2=1$ 上作单位速率运动时，其 x, y–坐标表示式分别为：

$$x=\cos t,\quad y=\sin t$$



[图 2–6]

由几何的熟知事实，其速度向量是垂直于 $\overrightarrow{OP}$ 的单位长向量，易见其 x, y 分量分别是 $-\sin t$ 和 $\cos t$。所以应该有：

$$\frac{d}{dt}\cos t=-\sin t,\quad \frac{d}{dt}\sin t=\cos t$$

【定理 2.1】： $\big[f(x)+g(x)\big]'=f'(x)+g'(x)$

$$\big[f(x)\cdot g(x)\big]'=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$$

$$[\frac{1}{f(x)}]'=-\frac{f'(x)}{[f(x)]^2}$$

[注] 上述公式的意义是当 $f'(x)$ 和 $g'(x)$ 在该点有定义时，则上述公式中的左侧函数在该点的变率也就有定义，而且其值等于右侧所给者。

证明：由定义的极限式易证：

$$\begin{aligned}&\lim_{h\to 0}\frac{(f(a+h)+g(a+h))-(f(a)+g(a))}{h}\\ =&\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{g(a+h)-g(a)}{h}\\ =&f'(a)+g'(a)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\lim_{h\to 0}\frac{(f(a+h)g(a+h))-(f(a)g(a))}{h}\\ =&\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\cdot\lim_{h\to 0}g(a+h)+f(a)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{g(a+h)-g(a)}{h}\\ =&f'(a)\cdot g(a)+f(a)\cdot g'(a)\end{aligned}$$

再者，因为

$$\frac{1}{h}\left\{\frac{1}{f(a+h)}-\frac{1}{f(a)}\right\}=-\frac{1}{f(a+h)\cdot f(a)}\cdot\frac{1}{h}(f(a+h)-f(a))$$

所以

$$\begin{aligned}&\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left\{\frac{1}{f(a+h)}-\frac{1}{f(a)}\right\}\\ =&-\lim_{h\to 0}\frac{1}{f(a+h)f(a)}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\\ =&-\frac{1}{f(a)^2}f'(a)\end{aligned}$$

【定理 2.2】：设 $y=f(u)$ 和 $u=g(x)$ 在 $u_0=g(x_0)$ 和 x_0 点皆为可微，则有复合函数 $y=f(g(x))$ 在 x_0 点亦为可微，而且其变率为 $f'(u_0)g'(x_0)$，亦即对于复合函数 $f(g(x))$ 的微分，有下述常用好用的公式，即

$$f(g(x))'=f'(g(x))\cdot g'(x)$$

证明：令 $\Delta u = g(x_0+\Delta x) - g(x_0)$, $\Delta y = f(g(x_0+\Delta x)) - f(g(x_0))$. 由所设易见当 $\Delta x \to 0$ 时，$\Delta u \to 0$, $\Delta y \to 0$. 让我们先讨论 $g'(x_0) \neq 0$ 的情形。当 Δx 足够小而且非零时，Δu 恒为非零，所以即有

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} \Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$$

请注意，在 $g'(x_0) = 0$ 的情形，当 Δx 足够小而且非零时，是不能保证 Δu 恒为非零的。而在 $\Delta u = 0$ 的时候当然不能把 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 改写成 $\frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}$（不能除以 0！）。其实在这种特殊情形 Δy 根本就是 0，又何必画蛇添足去改写它呢？总之，不论 Δu 是否为零，

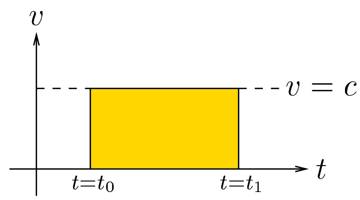
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0 = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$$

在 $g'(x_0) = 0$ 的情形是依然成立的。 □

2.2 总和与积分

从计算的角度来看，上一节所讨论的微分（亦即由给定函数 $f(x)$ 去求那个记录其逐点之变率的导函数 $f'(x)$）是相当简单的一种比值之极限；而积分则是一种无限分割求和的极限计算，它显然要比微分计算要来得复杂得多。但是在人类理性文明发展史上，积分的出现要比微分的起始早两千年。前者的首现就是在 Eudoxus 对于锥体体积公式的论证，而後者则在 Kepler 研究行星运行和 Galileo 研究自由落体中才出现其雏形 (prototype)。如今回顾，此事决非偶然，耐人寻思。究其原因，大概是因为那些激发无限分割求和的几何问题既自然、重要而且其难度上又富有挑战性；如今反思，要克服这种几何问题，其实别无他途！所以积分的想法，自然而然地起源于几何学，实非偶然。

要给积分求和这个基本概念赋以明确的定义，自然又得用 Eudoxus 逼近原理。首先，让我们来看一下那一种函数的「求和」是简单而且基本的。例如一列以 c 为其等速行进的火车在 $t = t_0$ 到 $t = t_1$ 这一段时间所走的总里程显然就是 $c \cdot (t_1 - t_0)$。若用函数的图象给以几何化的表达，亦即常函数 $v = c$ 在区间 $[t_0, t_1]$ 上方如 [图 2–7] 所示的面积等于 $c \cdot (t_1 - t_0)$：

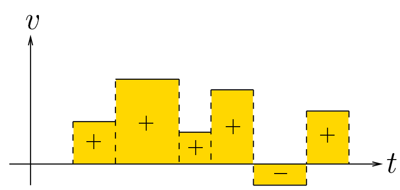


[图 2–7]

由此易见，一个常数函数 $f(t)=c$ 在区间 $[t_0,t_1]$ 上的积分乃是 $c(t_1-t_0)$。而它相应的几何量，就是 [图 2–7] 所示的区域的面积。当然，我们还可以把这种最为简单的例子稍加推广，即

【例 7】：设 $v=f(t)$ 是一个分段常数函数，亦即

$$f(t)=\begin{cases} c_1, & t_0\le t<t_1 \\ c_2, & t_1\le t<t_2 \\ \vdots & \\ c_k, & t_{k-1}\le t\le t_k \end{cases}$$



[图 2–8]

则可以分段用常数函数求和而得其总和为

$$c_1(t_1-t_0)+c_2(t_2-t_1)+\ldots+c_k(t_k-t_{k-1})$$

为了往後符号上的统一，我们将以积分符号表达上述分段求和之值，即当 $f(t)$ 是分段常数函数时，

$$\int_{t_0}^{t_k} f(t)dt=\sum_{i=1}^{k}\int_{t_{i-1}}^{t_i} c_i dt=\sum_{i=1}^{k} c_i(t_i-t_{i-1})$$

[因为分段常数函数的图象有如高高低低的阶梯，所以通常称之为阶梯函数 (step functions)。这种函数的积分就是上述简单明了的分段地以常

数函数求和，而它们也就是我们将要在积分层面，用来以简御繁的基本函数。]

由积分求和的直观内含，显然应该有下述比较原则，即

【积分求和的比较原则】(Comparison principle of sum of total effect)：

设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上恒不小于 $g(x)$，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的积分当然也不小于 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上的积分。以算式表达，即为

$$f(x) \geq g(x) \ \ \forall\, a \leq x \leq b \ \Rightarrow \ \int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$$

在明确了积分求和的比较原则之後，自然又可以效法 Eudoxus 运用逼近原理，用一系列妥为选取的阶梯函数去上、下夹逼一个给定函数，从而确立它在一个给定区间 $[a,b]$ 上的积分所应有之值。这样也就可以给相当广泛的各种各样函数的积分，赋予严格的定义。其具体做法，述之如下：

设 $f(x)$ 是一个定义于有限闭区间 $[a,b]$ 上的函数。若存在有上、下夹逼阶梯函数列 $\{G_n(x)\}$ 和 $\{g_n(x)\}$，满足下列条件，即

$$\begin{aligned} g_1(x) \leq \ldots \leq g_n(x) \leq g_{n+1}(x) \leq \ldots \leq f(x) \leq \ldots \\ \leq G_{n+1}(x) \leq G_n(x) \leq \ldots \leq G_1(x) \end{aligned}$$

对于所有 $a \leq x \leq b$ 成立；而且

$$\int_a^b G_n(x)dx - \int_a^b g_n(x) \to 0$$

由积分的比较原则，我们所要确定的 $\int_a^b f(x)dx$ 乃是一个分别被下述递增及递减数列

$$\left\{\int_a^b g_n(x)dx\right\} \quad \text{和} \quad \left\{\int_a^b G_n(x)dx\right\}$$

夹逼于其间者，所以它必然就是那个唯一满足对于所有 n 皆有下述夹逼不等式者也，即

$$\int_a^b g_n(x)dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b G_n(x)dx$$

【定义】：满足上述条件的函数 $f(x)$ 定义为：在区间 $[a,b]$ 上的可积函数 (integrable function)，而由上述夹逼数列所唯一确定之值则定义为 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的积分，以符号 $\int_a^b f(x)dx$ 记之。

【定理 2.3】：设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的一个单调递增（或递减）函数，则它是可积的。

证明：递增和递减这两种情形的论证在本质上是一样的。兹讨论前者的证明如下：

将 $[a,b]$ 等分成 2^n 段，设其分点为 $\{a_i, 1 \leq i \leq 2^n - 1\}$, $a_0 = a$, $a_{2^n} = b$。令 $g_n(x)$（及 $G_n(x)$）为在 $[a_{i-1}, a_i)$ 分段上取常数值 $f(a_{i-1})$（及 $f(a_i)$）的阶梯函数。由 $f(x)$ 的单调递增性可知

$$g_n(x) \leq f(x) \leq G_n(x)$$

对于所有 $a \leq x \leq b$ 恒成立，而且有

$$\begin{aligned}\int_a^b G_n(x)dx - \int_a^b g_n(x)dx &= (\frac{b-a}{2^n})\sum_{i=1}^{2^n} f(a_i) - (\frac{b-a}{2^n})\sum_{i=0}^{2^n-1} f(a_i) \\ &= \frac{b-a}{2^n}(f(b) - f(a)) \longrightarrow 0\end{aligned}$$

这也就证明了 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的可积性。 □

【推论】：设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的分段单调函数，亦即存在有限个分点 $\{a_i, 1 \leq i \leq k-1\}$，使得 $f(x)$ 在每一个分区间 $[a_{i-1}, a_i]$ 之上都是单调函数，则 $f(x)$ 是可积的。

证明：由所设和[定理 2.3]，$f(x)$ 在每一分区间 $[a_{i-1}, a_i]$ 之上都是可积的。把它们的可积条件之中的上、下夹逼阶梯函数列 $\{G_{i,n}(x)\}$ 和 $\{g_{i,n}(x)\}, 1 \leq i \leq k$，组合起来，亦即当 $a_{i-1} \leq x < a_i$ 时

$$G_n(x) = G_{i,n}(x), \quad g_n(x) = g_{i,n}(x)$$

则易见 $\{G_n(x)\}$ 和 $\{g_n(x)\}$ 构成了 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 之上的上、下夹逼阶梯函数列。所以 $f(x)$ 在全区间之上也是可积的，而且有

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{k} \int_{a_{i-1}}^{a_i} f(x)dx \quad (a_0 = a, a_k = b)$$ □

[注]：很多常用的函数都是分段单调的，所以它们都是可积的。但是上述简单的论证仅仅证明其可积性，亦即其在给定区间上的积分的唯一存在性。至于这种由两列项数无限增大的和式所左、右夹逼者的积分值通常是很难用这种和式来直接计算其极限值的。

【例 8】：设 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 都是在 $[a,b]$ 之上可积者，c_1, c_2 是任给常数，则 $c_1f_1(x)+c_2f_2(x)$ 也是在 $[a,b]$ 之上可积者而且

$$\int_a^b [c_1f_{(}x)+c_2f_2(x)]dx = c_1\int_a^b f_1(x)dx + c_2\int_a^b f_2(x)dx$$

[证明留作习题]

【例 9】：设 $f(x)$ 是分别在 $[a,b]$ 和 $[b,c]$ 之上可积者，则 $f(x)$ 在 $[a,c]$ 之上也是可积者，而且

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$

[证明留作习题]

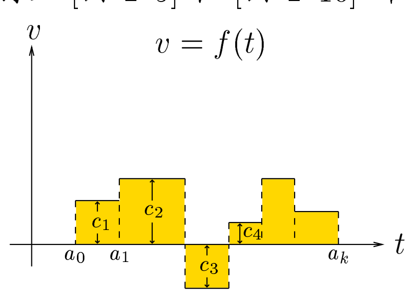
【例 10】：$\displaystyle\int_0^b xdx = \frac{1}{2}b^2,\ \int_0^b x^2dx = \frac{1}{3}b^3,\ \int_0^b x^3dx = \frac{1}{4}b^4$

[证明留作习题]（参看基础代数学第三章。）

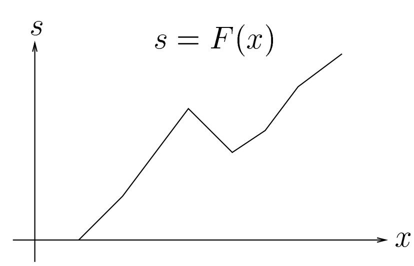
【例 11】：设 $f(t)$ 是一个阶梯函数，它在分区间 $[a_{i-1},a_i)$ 上取常数值 c_i, $1\le i\le k$。令

$$F(x) = \int_{a_0}^x f(t)dt, \quad a_0\le x\le a_k$$

则 $F(x)$ 乃是一个分段一次函数，亦即其图象为一折线，它在分区间 $[a_{i-1},a_i]$ 上者乃是一个斜率等于 c_i 的直线段。$v=f(t)$ 和 $s=F(x)$ 的图象分别如 [图 2–9] 和 [图 2–10] 所示。



[图 2–9]



[图 2–10]

若用算式表达，则有

$$
\begin{aligned}
F(x) &= c_1(x-a_0), \quad a_0 \le x \le a_1 \\
F(x) &= c_1(a_1-a_0)+c_2(x-a_1), \quad a_1 \le x \le a_2 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
F(x) &= \sum_{j=1}^{i-1} c_j(a_j-a_{j-1})+c_i(x-a_{i-1}), \quad a_{i-1} \le x \le a_i \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

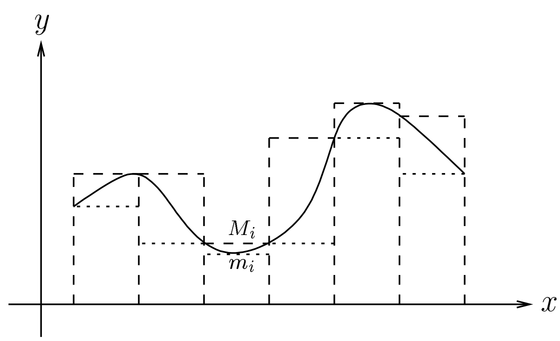
2.3 微积分基本定理与均值定理

【定理 2.4】：设 $f(x)$ 是在 $[a,b]$ 上的连续函数，则 $f(x)$ 是在 $[a,b]$ 上可积的。

证明：把 $[a,b]$ 等分为 2^n 个子区间。令 M_i, m_i 分别是 $f(x)$ 在第 i 个子区间 $[a_{i-1},a_i]$ 上的极大、极小值。定义 $G_n(x)$ 和 $g_n(x)$ 为分别在 $[a_{i-1},a_i)$ 上取常数值 M_i 和 m_i 的阶梯函数，则有

$$g_n(x) \le g_{n+1}(x) \le \ldots \le f(x) \le \ldots \le G_{n+1}(x) \le G_n(x)$$

$$\int_a^b G_n(x)dx - \int_a^b g_n(x)dx = \frac{b-a}{2^n}\sum_{i=1}^{2^n}(M_i-m_i)$$



[图 2–11]

再者，设 $\varepsilon > 0$ 是一个任给正数。由 $f(x)$ 的均匀连续性得知存在一个足够小的 $\delta > 0$，使得

$$|x_1-x_2| < \delta \ \Rightarrow \ |f(x_1)-f(x_2)| < \varepsilon$$

因此，只要把 n 取得足够大使得 $2^n > \frac{b-a}{\delta}$，则所有 $(M_i - m_i)$ 都小于 ε。亦即

$$\int_a^b G_n(x)dx - \int_a^b g_n(x)dx < \varepsilon \cdot (b-a)$$

所以 $f(x)$ 是在 $[a,b]$ 上可积的，而 $\int_a^b f(x)dx$ 就是被左、右夹逼数列 $\{\int_a^b g_n(x)dx\}$ 和 $\{\int_a^b G_n(x)dx\}$ 所夹逼者也。 □

【定理 2.5】（微积分基本定理, Fundamental Theorem of Calculus）：

设 $f(x)$ 为 $[a,b]$ 上的连续函数。令

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

则 $F'(x) = f(x)$。

证明：设 x_0 为 $[a,b]$ 中任取一点。令 $M(x_0,h)$ 和 $m(x_0,h)$ 分别是 $f(x)$ 在 $[x_0-h, x_0+h]$ 上的极大、极小值，其中 h 是一个足够小的正数（在 $x=a$ 或 b 的特殊情形，则上述邻域改用 $[a,a+h]$ 或 $[b-h,b]$）。则有

$$hm(x_0,h) \le \left\{ \begin{array}{c} \displaystyle\int_{x_0}^{x_0+h} f(x)dx \\ \displaystyle\int_{x_0-h}^{x_0} f(x)dx \end{array} \right\} \le hM(x_0,h)$$

亦即

$$m(x_0,h) \le \left\{ \begin{array}{c} \dfrac{1}{h}(F(x_0+h) - F(x_0)) \\ \dfrac{1}{-h}(F(x_0-h) - F(x_0)) \end{array} \right\} \le M(x_0,h)$$

再者，由 $f(x)$ 在 x_0 点的局部连续性，易见

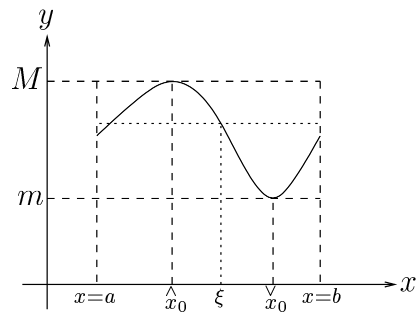
$$\lim_{h\to 0} m(x_0,h) = f(x_0) = \lim_{h\to 0} M(x_0,h)$$

所以 $F'(x_0) = f(x_0)$ 对于任给 $x_0 \in [a,b]$ 皆成立。 □

【定理 2.6】（积分均值定理）：设 $f(x)$ 为在 $[a,b]$ 上连续者，则存在 a, b 之间的一点 ξ 使得

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = f(\xi)$$

证明：令 M, m 分别是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的极大、极小值。



[图 2–12]

如 [图 2–12] 所示，

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

亦即

$$(f(\check{x}_0) =)\ m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq M\ (= f(\hat{x}_0))$$

再用中间值定理即得 $\check{x}_0$ 和 $\hat{x}_0$ 之间的一点 ξ 使得

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \qquad \square$$

设 $G(x)$ 是一个以 $f(x)$ 为其导函数者，则上述积分均值定理又可以改写成 $G(x)$ 的微分均值定理，即

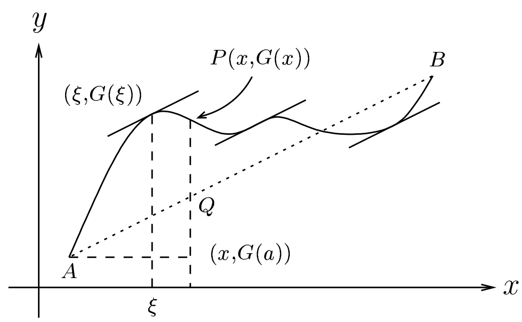
$$G(b) - G(a) = \int_a^b f(x)dx = (b-a)G'(\xi)$$

亦即 $$G(b) = G(a) + (b-a)G'(\xi)$$

在此，我们假设了 $G'(x) = f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的连续性。有鉴于上述微分均值定理的基本重要性，我们在此再给以独立的证明，而且这样做的一个优点是它只需要 $G'(x)$ 在 (a,b) 中的每点皆能定义，从而摆脱了 $G'(x)$ 在 $[a,b]$ 上的连续这个过强的要求。

【定理 2.7】（微分均值定理）：设 $G(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，而且 $G'(x)$ 在 (a,b) 中的每点皆能定义（亦即可微），则在 (a,b) 中存在一点 ξ 使得

$$G(b) = G(a) + (b-a)G'(\xi)$$



[图 2–13]

证明：如 [图 2–13] 所示，上述公式的几何意义乃是 $G(x)$ 的图象在 $(\xi, G(\xi))$ 点的切线和连结 $A(a,G(a))$ 和 $B(b,G(b))$ 两点的割线互相平行。从几何直观来看，不难想到那些使得 $\overrightarrow{QP}$ 极大或极小之点，其切线应该和 $\overline{AB}$ 平行。再者，不难看出

$$\overrightarrow{QP} = G(x) - G(a) - \frac{G(b)-G(a)}{b-a}(x-a)$$

令其为 $H(x)$，则有

$$H(a) = H(b) = 0$$

而且 $H(x)$ 也是在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 中每点皆为可微者。再者，除非 $H(x) \equiv 0$（亦即 $G'(x) \equiv \frac{G(b)-G(a)}{b-a}$），$H(x)$ 必然有其极大或极小值不等于 0。设其取非零的极值之点为 ξ，即有

$$H'(\xi) = G'(\xi) - \frac{G(b)-G(a)}{b-a} = 0$$

亦即

$$G(b) = G(a) + (b-a)G'(\xi) \qquad \square$$

【推论 1】：设 $f(x)$ 为 $[a,b]$ 上的连续函数而且 $f'(x) \equiv 0$，则 $f(x)$ 为一个常数函数。

<u>证明</u>：令 c 为 $(a,b]$ 中任何一点，则由微分均值定理知道存在一个 $\xi \in (a,x)$ 使得

$$f(c) = f(a) + (c-a)f'(\xi) = f(a)$$

由此可见 $f(x)$ 必为常数函数。 □

【推论 2】：设 $f(x)$ 为 $[a,b]$ 上的连续函数而 $G'(x) = f(x)$，则

$$\int_a^b f(t)dt = G(b) - G(a)$$

<u>证明</u>：由所设

$$\left[G(x) - \int_a^x f(t)dt\right]' = G'(x) - F'(x) \equiv 0$$

所以 $G(x) - \int_a^x f(t)dt$ 乃是一个常数函数，亦即存在一个常数 C 使得

$$G(x) = \int_a^x f(t)dt + C \quad \Rightarrow \quad C = G(a)$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(t)dt = G(b) - C = G(b) - G(a)$$ □

【推论 3】（部分积分公式）：设 $f'(x)$ 和 $g'(x)$ 都是在 $[a,b]$ 上连续者，则有

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(b)g(b) - f(a)g(a)] - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

<u>证明</u>：$\int_a^b f(x)g'(x)dx + \int_a^b f'(x)g(x)dx$

$$= \int_a^b [f(x)g(x)]'dx = f(b)g(b) - f(a)g(a)$$ □

【定理 2.8】（高阶微分均值定理，亦即泰勒公式）：

设 $f(x)$ 的 k–阶导函数 $f^{(k)}(x)$ 在 $[a,b]$ 上到处连续，则存在一个介于 a,b 之间的 ξ，使得

$$\begin{aligned} f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!}f''(a) + \dots \\ + \frac{(b-a)^{k-1}}{(k-1)!}f^{(k-1)}(a) + \frac{(b-a)^k}{k!}f^{(k)}(\xi) \end{aligned}$$

证明：由

$$f(b) = f(a) + \int_a^b f'(x)dx$$

起始，逐次用部分积分公式，即有

$$\begin{aligned} f(b) &= f(a) + (b-a)f'(a) + \int_a^b (b-x)f''(x)dx \\ &= f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{1}{2!}(b-a)^2 f''(a) + \int_a^b \frac{(b-x)^2}{2!} f'''(x)dx \\ &\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &= f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{1}{2!}(b-a)^2 f''(a) + \ldots \\ &\qquad + \frac{(b-a)^{k-1}}{(k-1)!} f^{(k-1)}(a) + \int_a^b \frac{(b-x)^{k-1}}{(k-1)!} f^{(k)}(x)dx \end{aligned}$$

令 M, m 分别是 $f^{(k)}$ 在 $[a, b]$ 上的极大值和极小值。由比较原则，即有

$$m \int_a^b \frac{(b-x)^{k-1}}{(k-1)!} dx \leq \int_a^b \frac{(b-x)^{k-1}}{(k-1)!} f^{(k)}(x)dx \leq M \int_a^b \frac{(b-x)^{k-1}}{(k-1)!} dx$$

亦即

$$m \frac{(b-a)^k}{k!} \leq \int_a^b \frac{(b-x)^{k-1}}{(k-1)!} f^{(k)}(x)dx \leq M \frac{(b-a)^k}{k!}$$

由上述不等式再用中间值定理，即得一个介于 a, b 之间的 ξ，使得

$$\int_a^b \frac{(b-x)^{k-1}}{(k-1)!} f^{(k)}(x)dx = \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(\xi)$$

□

【例题与习题】：

本章所讨论的微积分基础理论乃是整个分析学的基础和精要之所在。它广泛的应用和深厚的发展可以说是无限的。下面所列述的例、习题只不过略述其一、二，以供读者之初步练习者也。

I. 高阶密切多项曲线：

一个函数 $y = f(x)$ 在 x_0 点可微 (differentiable) 的几何化描述乃是其图象在 $(x_0, f(x_0))$ 点具有切线，其切线方程式即为：

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

它乃是图象上两点 $P_i(x_i, f(x_i)), i = 0, 1,$ 的割线 P_0P_1 在 $x_1 \to x_0$ 的极限位置。

设 $y = f(x)$ 在 x_0 点的邻近 k–阶连续可微（亦即 $f^{(k)}(x)$ 在 x_0 点邻近存在而且连续），则由泰勒公式可见下述多项函数

$$g(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

和 $f(x)$ 在 $|x - x_0|$ 相当小时，其差额乃是一个比 k–阶微量 $|x - x_0|^k$ 还要小得多者也，亦即

$$\begin{aligned} &|f(x) - g(x)| = \frac{(x - x_0)^k}{k!}|f^{(k)}(\xi) - f^{(k)}(x_0)|, \\ &\lim_{x \to x_0} |f^{(k)}(\xi) - f^{(k)}(x_0)| = 0 \end{aligned}$$

由此可见，$f(x)$ 在 x_0 点邻近 k–阶连续可微的实质内涵乃是 $f(x)$ 在 x_0 点邻近可以用上述多项函数 $g(x)$ 逼近到 k–阶。

再者，设 $\{x_i, 1 \leq i \leq k\}$ 是 x_0 的邻近 k 点。由多项式的插值公式可得一个唯一的次数至多为 k 的多项式，它在 $\{x_i, 0 \leq i \leq k\}$ 的值也就是 $f(x_i)$。试问上述多项曲线在 $\{x_i, 1 \leq i \leq k\}$ 都趋于 x_0 时，是否也和 $k = 1$ 的情形一样具有其极限多项曲线？若然，则它乃是切线的推广，称之为曲线 $y = f(x)$ 在 $(x_0, f(x_0))$ 点的 k–阶密切多项曲线。兹以 $k = 2$ 的情形为例，证明其唯一存在性，及得出其方程式：

【例 1】：由 (1.33) 可见过 $\{P_i(x_i, f(x_i)), 0 \leq i \leq 2\}$ 的两次多项曲线的方程式可以用行列式表达之，即

$$\begin{vmatrix} -y & 1 & x & x^2 \\ -f(x_0) & 1 & x_0 & x_0^2 \\ -f(x_1) & 1 & x_1 & x_1^2 \\ -f(x_2) & 1 & x_2 & x_2^2 \end{vmatrix} = 0$$

但是上式是不能直接求其在 $x_1 \to x_0$ 之极限式者，因为如此所得者乃是第二，第三行相同者也，方程式蜕化成无用的 $0=0$。所以我们要先用行列式的性质和微分均值定理，消除其蜕化的原由，然後再求其 $x_1 \to x_0$ 之极限式如下：将第三行减去第二行然後再用 $f(x_1)-f(x_0)=f'(\xi)(x_1-x_0)$，即可把上式改写为

$$(x_1-x_0)\begin{vmatrix} -y & 1 & x & x^2 \\ -f(x_0) & 1 & x_0 & x_0^2 \\ -f'(\xi) & 0 & 1 & x_1+x_0 \\ -f(x_2) & 1 & x_2 & x_2^2 \end{vmatrix}=0$$

这种计算显示了上式在 $x_1 \to x_0$ 时蜕化为 $0=0$ 的原由乃是它其实含有 (x_1-x_0) 因子。所以只要除去它之後再求极限就不会蜕化了。其所得为

$$\begin{vmatrix} -y & 1 & x & x^2 \\ -f(x_0) & 1 & x_0 & x_0^2 \\ -f'(x_0) & 0 & 1 & 2x_0 \\ -f(x_2) & 1 & x_2 & x_2^2 \end{vmatrix}=0$$

它乃是和 $y=f(x)$ 相切于 $P_0(x_0,f(x_0))$ 点而且过 $P_2(x_2,f(x_2))$ 点的二次多项曲线。现在再让 $x_2 \to x_0$，并求其极限式。当然，我们又得在求极限之前，先作类似的准备工作去排除其中隐含的 (x_2-x_0) 因子。要不然肯定会蜕化成 $0=0$，是不？将第四行减去第二行和 $(x_2-x_0)\times$第三行，再用泰勒公式即得

$$(x_2-x_0)^2\begin{vmatrix} -y & 1 & x & x^2 \\ -f(x_0) & 1 & x_0 & x_0^2 \\ -f'(x_0) & 0 & 1 & 2x_0 \\ -\frac{f''(\eta)}{2} & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=0$$

所以只要除去上式中的 $(x_2-x_0)^2$ 因子之後再求其 $x_2 \to x_0$ 之极限，即得所求之 2–阶密切多项曲线的方程式乃是

$$\begin{vmatrix} -y & 1 & x & x^2 \\ -f(x_0) & 1 & x_0 & x_0^2 \\ -f'(x_0) & 0 & 1 & 2x_0 \\ -\frac{f''(x_0)}{2} & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=0$$

【习题 1】：试证上式之展开式为

$$-y+f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2=0$$

【习题 2】：试用同样的计算求得 $y=f(x)$ 的 3–阶密切多项曲线的方程式。

【习题 3】：设 Γ 是一条由下述 2–阶连续可微的参数式

$$x=f(t),\quad y=g(t)$$

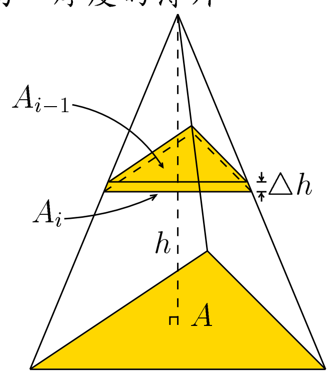
所描述的平面曲线，$P_i(f(t_i),g(t_i))$, $0\le i\le 2$, 是其上相异三点。令 $C(P_0,P_1,P_2)$ 是由上述三点所定之圆。试用类似于[例 1]的计算证明在 t_1, t_2 都趋于 t_0 时，$C(P_0,P_1,P_2)$ 具有唯一的极限圆，而且求得它的方程式。（它叫做曲线 Γ 在 P 点的密切圆。）

【习题 4】：试用 $f'(t_0)$, $g'(t_0)$ 和 $f''(t_0)$, $g''(t_0)$ 表达上述密切圆的半径。

II. <u>几个历史性的积分范例</u>：

【例 2】：锥体体积公式 (Eudoxus)：$V=\frac{1}{3}hA$

如 [图 2–14] 所示，一个底面积为 A、高度为 h 的锥体可以用平行于底面的平面切割成 n 块均一厚度的薄片：



[图 2–14]

由顶层向下数的第 i 块薄片，其底面积为 A_i，顶面积为 A_{i-1}。由相似形定理，古希腊的几何学家已知

$$A_i:A=\left(\frac{i}{n}h:h\right)^2=\left(\frac{i}{n}\right)^2,\quad 即\ A_i=\frac{i^2}{n^2}A$$

由此易知其第 i 块薄片之体积是介乎于 $\frac{h}{n}\cdot A_{i-1}$ 和 $\frac{h}{n}\cdot A_i$ 两者之间，亦即

$$\frac{h}{n}A_{i-1} = \frac{(i-1)^2}{n^3}hA < V_i < \frac{i^2}{n^3}hA = \frac{h}{n}A_i, \quad 1 \le i \le n$$

把上述的不等式整合起来，便得出

$$\frac{hA}{n^3}\sum_{i=1}^{n}(i-1)^2 < \sum_{i=1}^{n}V_i = V < \frac{hA}{n^3}\sum_{i=1}^{n}i^2$$

接着 Eudoxus 便应用已知的 $\sum i^2$ 求和公式把上式重写成

$$\frac{hA}{3}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{2n}\right) < V < \frac{hA}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{2n}\right)$$

至此，Eudoxus 发现上述不等式对所有正整数 n 都成立，但无论 n 如何增大，V 的值（锥体体积）是不变的！而当 n 无限地增大时，上式的上限和下限之差别为

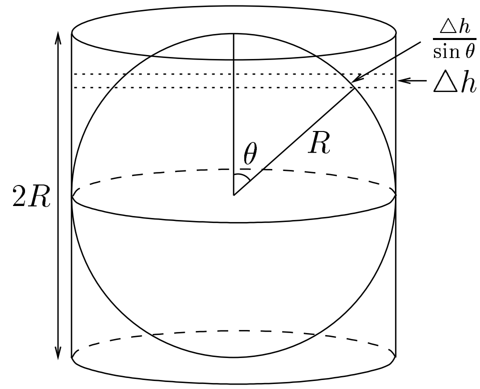
$$\frac{hA}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{2n}\right) - \frac{hA}{3}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{2n}\right) = \frac{hA}{n}$$

这个量会无限地缩小（即可小于任意给出的正实数）。由此可见，唯一可以对所有 n 能满足上述不等式的量必定是 $\frac{hA}{3}$，因此得证

$$V = \frac{1}{3}hA$$

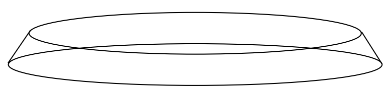
【例 3】：球面面积公式 (Archimedes)：$A = 4\pi R^2$

Archimedes (287–212 B.C.) 是公认的古希腊时代伟大的科学家和几何学家，他一生有很多卓越的贡献；而他最引以自豪者，首推上述公式及其简洁的证明，这也就是尊照他本人的遗嘱刻在他的墓碑上者。证明的要点在于论证一个半径为 R 的球面面积和一个高为 $2R$，半径为 R 的圆柱面面积相等。在他的墓碑上所刻划的，就是如 [图 2–15] 所示把两者放在相切同高的位置。



[图 2–15]

设想用一系列和柱面正交的平行面，把两个面都细分成很窄很窄的一圈圈。设相邻两个平行平面之间的距离是 Δh，则柱面上的窄条（或圈）的面积等于 $\Delta h 2\pi R$，而在球面上的相应窄圈其宽度和长度随著 θ 而改变，在 Δh 非常、非常小的时候，它可以看成如 [图 2–16] 所示的圆台之侧面：



[图 2–16]

其中环长度是 $2\pi R\sin\theta$，亦即其环长的平均值是 $2\pi R\sin\theta$，而侧面的宽度则为 $\dfrac{\Delta h}{\sin\theta}$，所以其面积的高度近似值也是 $\Delta h 2\pi R$（亦即可能的误差肯定在 Δh^2 这种量级）。由此他就用 Eudoxus 所创的逼近原理证明了两者的面积必然相等，而後者的面积显然等于高为 $2R$，长为 $2\pi R$ 的长方形面积，亦即是 $4\pi R^2$。

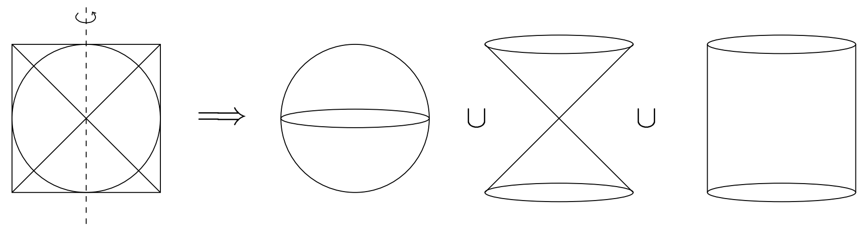
【例 4】：球体体积公式 (祖暅原理之应用)：$V = \frac{4}{3}\pi R^3$

在古代中国，几何学研究乃是基于致用之所需，用来解决各种各样的建筑及测量的实际问题。他们成功地利用矩形面积公式为基础，以割补重组方法证明了平面几何上的基本定理如勾股定理、相似三角形定理等。及至东汉刘徽，开始进而研究体积问题（如求解球体体积公式等等）就发现不能单靠割补重组去求公式了。这种困难也自然而然激发了刘徽、祖冲之、祖暅他们世代相承地对于体积的理论的探讨。一直到了祖暅总结而得下述原理才成功地解答了球体体积公式。

【祖暅原理】：幂势既同，则积不容殊。

亦即是说：如有两个物体，它们沿某一方向的所有截面面积（幂势）皆相等，则两物体的体积必定相等。

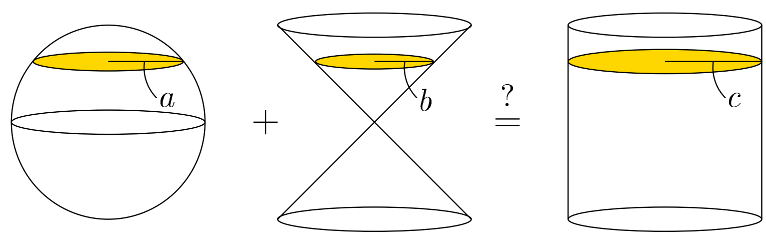
让我们以球体体积公式为例子，说明祖暅原理的应用：首先，将下面的图形以虚线为轴作旋转，便可得出一个球体、两个对顶的圆锥体和一个圆柱体：



[图 2–17]

运用祖暅原理，我们若可证明球体与对顶圆锥体的横截面面积之和等于圆柱体的横截面面积，则有

$$\text{球体体积} + 2 \times \text{圆锥体体积} = \text{圆柱体体积}$$



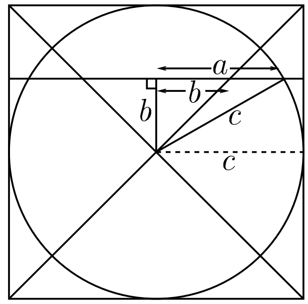
$$\pi a^2 \quad + \quad \pi b^2 \quad \stackrel{?}{=} \quad \pi c^2$$

[图 2–18]

亦即

$$\begin{aligned} \text{球体体积} &= \text{圆柱体体积} - 2 \times \text{圆锥体体积} \\ &= \pi R^2 \cdot (2R) - 2 \times \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot R \\ &= 2\pi R^3 - \frac{2}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi R^3 \end{aligned}$$

其实，由 [图 2–19] 就可立即看出为何 $a^2 + b^2 = c^2$（勾股定理！）



[图 2–19]

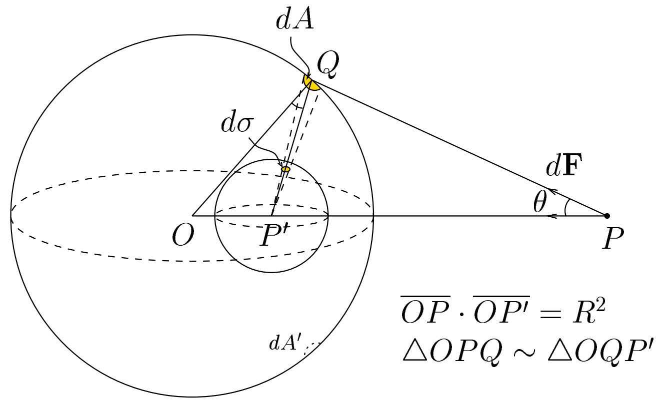
【例 5】：地心引力 (Newton's Formula)

当年牛顿应用数理分析技巧来研究 Kepler 行星运行三定律时，其所得的结果为：行星和太阳之间的引力与两者间距离的平方满足反比的关系（亦即平方反比定律 (inverse square law)）。然後牛顿继而想再进一步把行星与太阳之间的引力推广到任何物体与物体之间的引力（亦即所谓的万有引力），他遇到一个困难，使这位科学史上的巨人困扰了数年。由于行星与太阳之间的距离很大，所以在计算中可把行星和太阳当作两个质点，即可以假设质点集中了整个球体的质量；但当推广至任何物体与物体之间的情形，如苹果与地球，则便不可以随便把地球当作为一个质点了。牛顿所遇到的困难，就是他不能证明的确也可以把地球当作为一个质点。即使在 1684 年他的好友 Halley（哈雷）力邀牛顿发表已得的结果，他仍不愿意发表。到了 1686 年，他終于成功地证明了上述结果，即一个密度只随著到球心距离而变化的球体，在吸引球外一个质点时，所作用的力就像假设全部质量都集中在球心一样。在这年他写信给 Halley 表示同意写出他的工作[1]，这就是在次年 (1687) 出版的科学巨著 Philosophiae Naturalis Principia Mathematica。

牛顿在书中所给的证明是很繁复的。在这里，我们给出另一个证明，它巧妙地运用了球的几何特性而大大簡化了计算过程。

对于一个球面的最自然、最对称的点当然就是球心。但是在研讨球面与球外一点 P 的互相作用时，从几何观点来看，最自然、最对称的点就不再是球心 O，而是 [图 2–20] 的 P' 点（这是 P 相对于球面的反射对称点）。

[1]在信中牛顿还提到直至 1685 年，他还在怀疑这个结果是错的。

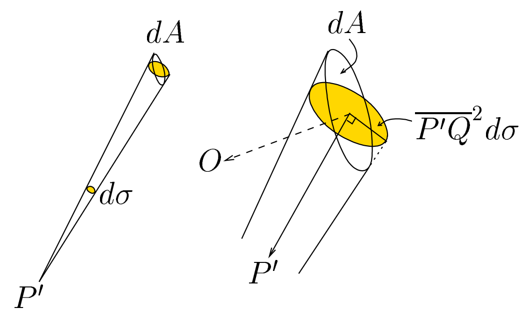


[图 2–20]

设球体其中一层薄壳的半径为 R，面密度为 ρ，球外质点 P 的质量为 m。考虑在薄壳上的一小片面积 dA 作用于 P 的引力 $d\mathbf{F}$。因薄壳对于 OP 是旋转对称，$d\mathbf{F}$ 垂直于 OP 的分量会被对称小片 dA' 所抵消，所以只需考虑 OP 方向的分量：

$$|d\mathbf{F}|\cos\theta = G\frac{\rho dA\cdot m}{\overline{PQ}^2}\cos\theta$$

构作 P' 使得 $\overline{OP}\cdot\overline{OP'}=R^2$，并以 P' 为心构造一个单位球面。令 P' 连向 dA 的射线在该单位球面上的影象为 $d\sigma$。



[图 2–21]

如 [图 2–21] 所示，dA 和 $d\sigma$ 之间有一个简单的关系：

$$dA\cdot\cos\theta = \overline{P'Q}^2\cdot d\sigma$$

因此，整个薄壳作用于 P 的力就是

$$
\begin{aligned}
|\mathbf{F}| = \sum |d\mathbf{F}| \cdot \cos\theta &= \sum Gm\rho \frac{dA\cdot\cos\theta}{\overline{PQ}^2} = \sum Gm\rho \frac{\overline{P'Q}^2\cdot d\sigma}{\overline{PQ}^2} \\
&= \sum Gm\rho \frac{R^2}{\overline{OP}^2} d\sigma = Gm\rho \frac{R^2}{\overline{OP}^2} \sum d\sigma \\
&= Gm\rho \frac{R^2}{\overline{OP}^2} \cdot 4\pi = G\frac{Mm}{\overline{OP}^2}
\end{aligned}
$$

因此这层薄壳作用于 P 的力等于将其全部质量集中于 O 而作用于 P 的力。再将所有薄壳作用的力加起来，便得所需之公式。

第 三 章

指数及对数函数

3.1 指数、对数函数的定义与基本性质

设 $a > 0, a \neq 1$ 是一个给定实数。它的 n 乘方 a^n 乃是 n 个 a 相乘之积，所以显然有指数定则

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}, \quad (a^m)^n = a^{nm}, \quad m, n \in \mathbb{N}$$

我们可以逐步把上述指数的定义推广到整数、有理数和实数指数，使得 a^x 对于所有实数 x 皆有其自然的定义，称之为以 a 为基底的指数函数 (exponential function)。指数定义的逐步自然推广如下：

(i) 0 和负整数指数的定义：

$$a^0 := 1, \quad a^{-n} := \frac{1}{a^n}$$

(ii) 有理指数的定义：

设 $a > 1$，则易见 $f(x) = x^n - a$ 是一个递增连续函数。由所设即有 $f(1) < 0, f(a+1) > 0$，所以存在唯一的 $1 < \xi < (a+1)$ 使得 $f(\xi) = 0$，称之为 a 的 n 方根，以 $\sqrt[n]{a}$ 记之。而 a 的有理数指数定义如下：

$$a^{\frac{m}{n}} := (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$$
$$a^{-\frac{m}{n}} := 1/a^{\frac{m}{n}} = (\frac{1}{\sqrt[n]{a}})^m$$

[当 $0<a<1$ 时，则有 $\frac{1}{a}>1$，所以可以用 $a^{\pm\frac{m}{n}}=(\frac{1}{a})^{\mp\frac{m}{n}}$ 把它归于前者定义之。]

不难验证上述有理数指数的定义乃是能够保有下述指数定则和单调性的唯一者，即当 $r,s\in\mathbb{Q}$

$$a^r\cdot a^s=a^{r+s},\quad (a^r)^s=a^{sr}$$
$$r>s\Rightarrow\begin{cases}a^r>a^s & (a>1)\\ a^r<a^s & (0<a<1)\end{cases}$$

(iii) 现在让我们定义实数指数。首先要证明下述引理：

【引理 3.1】：设 $a>0$，则 $\lim_{n\to\infty}a^{\frac{1}{n}}=1$。

证明：不妨设 $a>1$。则 $\{a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}\}$ 乃是一个递减数列，所以其极限值就是它的极大下界。1 显然是它的一个下界，所以只要证明任何大于 1 者不可能是它的下界。亦即任给 $\varepsilon_0>0$，当 n 足够大时，$a^{\frac{1}{n}}<1+\varepsilon_0$。其实，当 $n>\frac{a-1}{\varepsilon_0}$ 时，由二项式即有

$$(1+\varepsilon_0)^n>1+n\varepsilon_0>1+(a-1)=a\ \Rightarrow\ 1+\varepsilon_0>a^{\frac{1}{n}}$$

当 $0<a<1$ 时，其证明基本上是一模一样的。 □

【推论】：设 $a>1$，而且 $\{r_n\}$ 和 $\{s_n\}$ 是一对左、右夹逼正有理数数列，即

$$0<r_1\le r_2\le\cdots\le r_n\le r_{n+1}\le\cdots\le s_{n+1}\le s_n\le\cdots\le s_2\le s_1$$

而且 $(s_n-r_n)\to 0$（亦即可以小到任意小），则 $\{a^{r_n}\}$ 和 $\{a^{s_n}\}$ 也是一对左、右夹逼数列。

证明：由 $a>1$ 和 $\frac{m}{n}>\frac{p}{q}\Rightarrow a^{\frac{m}{n}}>a^{\frac{p}{q}}$ 可见 $\{a^{r_n}\}$ 是递增的而 $\{a^{s_n}\}$ 则是递减的。所以唯一还需要验证者乃是

$$\left(a^{s_n}-a^{r_n}\right)\quad \text{可以小到任意小}$$

兹证之如下：

设 $\varepsilon>0$ 是任给正实数，另取一个正实数 $\varepsilon'>0$ 使得 $a^{s_1}\cdot\varepsilon'<\varepsilon$。由上述引理即有一个足够大的 N，使得

$$a^{\frac{1}{n}}<1+\varepsilon',\quad n\ge N$$

再者，由所设 $(s_n - r_n) \to 0$，即有足够大的 n 使得 $(s_n - r_n) < \dfrac{1}{N}$。由此即得

$$\begin{aligned} a^{s_n} - a^{r_n} &= a^{r_n}\left(a^{(s_n - r_n)} - 1\right) \\ &< a^{s_1} \cdot \left(a^{\frac{1}{N}} - 1\right) \\ &< a^{s_1} \cdot \varepsilon' < \varepsilon \end{aligned}$$

□

【定义】：设 $a > 1$，λ 是一个给定正实数，$\{r_n\}$ 和 $\{s_n\}$ 是 λ 的一对左、右夹逼正分数数列。则定义 a^λ 为左、右夹逼数列 $\{a^{r_n}\}$ 和 $\{a^{s_n}\}$ 所夹逼的那个正实数。

定义之合理性：我们必须验证上述定义和 λ 的左、右夹逼正分数列的选取无关，唯有这样，上述定义才是合理的。为此，设 $\{r'_n\}$ 和 $\{s'_n\}$ 是另一 λ 的左、右夹逼正分数数列，则有

$$\{r_n\} \text{ 和 } \{s'_n\} \quad \text{以及} \quad \{r'_n\} \text{ 和 } \{s_n\}$$

也都是 λ 的左、右夹逼数列。所以

$$\{a^{r_n}\} \text{ 和 } \{a^{s'_n}\} \quad \text{以及} \quad \{a^{r'_n}\} \text{ 和 } \{a^{s_n}\}$$

也都是 a^λ 的左、右夹逼数列。因此

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} a^{r_n} &= \lim_{n\to\infty} a^{s'_n} \\ \lim_{n\to\infty} a^{r'_n} &= \lim_{n\to\infty} a^{s_n} \end{aligned}$$

由此可见上述四个极限都相等，所以定义它们的共同极限为 a^λ 是完全合理而且自然的！

【定义】：$a^{-\lambda}$ 定义为 $\dfrac{1}{a^\lambda}$。

[当 $0 < a < 1$ 时，同样可以用 $a^\lambda = (\frac{1}{a})^{-\lambda}$ 把它归于前者定义之。]

总结上面由一个给定 a 的整数指数到它的实数指数的逐步推广，所用到者基本上就是实数系的连续性，和正有理数指数的单调性和夹逼性，亦即

$$\begin{gathered} \frac{m}{n} > \frac{p}{q} \Rightarrow a^{\frac{m}{n}} > a^{\frac{p}{q}} \\ (s_n - r_n) \to 0 \Rightarrow (a^{s_n} - a^{r_n}) \to 0 \end{gathered}$$

再者，把 $x \mapsto a^x$ 想成一个实变数 x 的函数，亦即定义 $f(x) = a^x$，称之为以 a 为基底的指数函数 (the exponential function with a as the base)，它具有下述特徵性质：

【定理 3.1】：设 $a > 1$（或 $0 < a < 1$），则指数函数 $f(x) = a^x, x \in \mathbb{R}$ 是一个单调递增（或递减）函数，而且满足

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2)$$

反之，任何一个满足上式的单调递增（或递减）函数 $f(x)$ 总是一个指数函数，亦即

$$f(x) = a^x, \quad a = f(1)$$

证明：其实，[定理 3.1]就是上述指数逐步推广所得的总结。至于其唯一性的验证的主要步骤如下：由假设 $f(x_1 + x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2)$ 即得

$$f(x) = f(0 + x) = f(0) \cdot f(x) \Rightarrow f(0) = 1$$

再由其单调（递增）性即有 $f(1) > f(0) = 1$。令 $a = f(1)$，则有 $f(\frac{1}{n}) > f(0) = 1$，而且

$$\begin{aligned}
&\left[f(\frac{1}{n})\right]^n = f(\frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}) = f(1) = a \\
\Rightarrow\ & f(\frac{1}{n}) = \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} \\
\Rightarrow\ & f(\frac{m}{n}) = \left[f(\frac{1}{n})\right]^m = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = a^{\frac{m}{n}} \\
& f(-\frac{m}{n}) \cdot f(\frac{m}{n}) = f(0) = 1 \\
\Rightarrow\ & f(-\frac{m}{n}) = \left[f(\frac{m}{n})\right]^{-1} = \left[a^{\frac{m}{n}}\right]^{-1} = a^{-\frac{m}{n}}
\end{aligned}$$

再由单调性即得

$$f(x) = a^x$$

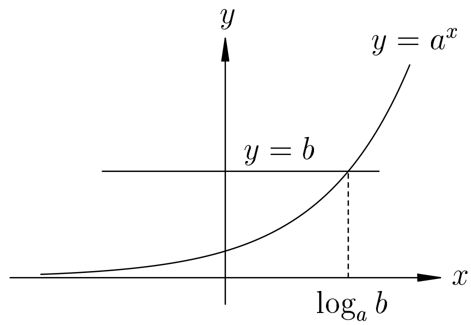
对于所有实数 x 皆成立。 □

[注意]：在上述由分数指数到实数指数的推广之中，我们所用者乃是所要定义的 a^x 的单调性。由此可见单调性乃是实变指数函数 $y = a^x$ 定义之所基，而其连续性则是如此定义之所得！

设 $a>1$（或 $0<a<1$），则 $f(x)=a^x$ 是一个定义于全实数系的单调递增（或递减）连续函数，而且

$$\lim_{x\to-\infty} a^x = 0, \quad \lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty$$
$$\text{（或} \lim_{x\to-\infty} a^x = +\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} a^x = 0\text{）}$$

所以对于任给正实数 b, $f(x)=b$ 具有唯一之解，将以符号 $\log_a b$ 记之，叫做 b 以 a 为底的<u>对数</u>（如 [图 3–1] 所示）。



[图 3–1]

【定义】：$\log_a y = x \Leftrightarrow y = a^x$

不难验证对数函数具有下述基本性质，即

(i) $\log_a y_1\cdot y_2 = \log_a y_1 + \log_a y_2$

(ii) 单调性

(iii) 连续性

[对数函数乃是指数函数的反函数，所以其基本性质乃是指数函数相应的基本性质的反映。由此即可逐个验证上述三点。]

设 a, b 都是不等于 1 的两个正实数，则有

$$b^x = (a^{\log_a b})^x = a^{(\log_a b)x}$$
$$a^x = (b^{\log_b a})^x = b^{(\log_b a)x}$$

由此可见，不同基底的指数函数所差别者仅仅是 $x\mapsto kx$ 这种常数倍的变换而已。

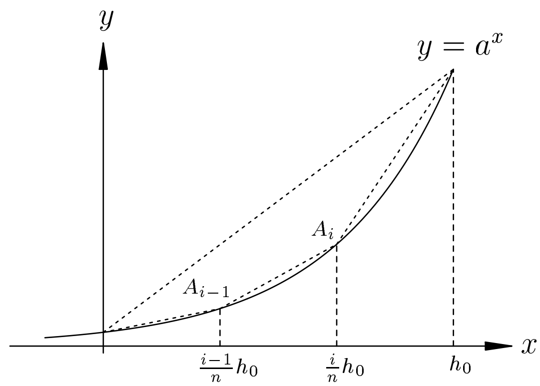
3.2 指数函数与对数函数的微分

设 $a > 1$ 为取定基底，$f(x) = a^x$。

【引理 3.2】：$f(x) = a^x$ 在 $x = 0$ 点是可微的，亦即

$$\lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h}$$

是存在的，且以 K_a 记之。



[图 3–2]

证明：若把某一取定的 $h_0 > 0$ 等分成 n 段，则其第 i 段上的平均变率（即 [图 3–2] 中 $\overline{A_{i-1}A_i}$ 的斜率）等于其第一段的斜率的 $a^{\frac{i-1}{n}h_0}$–倍，亦即

$$\begin{aligned} m_i(h_0) &= \frac{n}{h_0}(a^{\frac{i}{n}h_0} - a^{\frac{i-1}{n}h_0}) \\ &= a^{\frac{i-1}{n}h_0}\frac{n}{h_0}(a^{\frac{h_0}{n}} - 1) = a^{\frac{i-1}{n}h_0}m_1(h_0) \end{aligned}$$

由此可见其逐段的斜率是逐次以 $a^{\frac{h_0}{n}}$–倍增加的。用它就不难推导当 $h' < h$ 和 h', h 可公度时

$$m(h') = \frac{a^{h'} - 1}{h'} < \frac{a^h - 1}{h} = m(h)$$

然後便可以用 Eudoxus 逼近方法来证明 $m(h), h > 0$ 乃是一个 h 的单调递增函数，所以 $\lim_{h \searrow 0} m(h)$ 是存在的，它就是 $\{m(h), h > 0\}$ 的极大下

界。再者

$$\lim_{h\searrow 0}\frac{a^{(-h)}-1}{(-h)}=\lim_{h\searrow 0}a^{(-h)}\cdot m(h)=1\cdot\lim_{h\searrow 0}m(h)$$

这也就证明了 $f(x)=a^x$ 在 $x=0$ 是可微的。 □

[注]：当 $0<a<1$ 时，亦会有同样结果，试证之。

【定理 3.2】：$f(x)=a^x$ 是到处可微的，而且

$$f'(x)=K_af(x)$$

<u>证明</u>：对于任给 x_0 点，皆有

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0}a^{x_0}\cdot\frac{a^h-1}{h}=a^{x_0}\cdot K_a$$ □

【推论】：$K_b=(\log_a b)K_a$

<u>证明</u>：$b^x=a^{(\log_a b)\cdot x}$，所以

$$K_b\cdot b^x=(b^x)'=\left[a^{(\log_a b)x}\right]'=\log_a b\,K_a\cdot a^{(\log_a b)x}=(K_a\log_a b)b^x$$

亦即 $K_b=(\log_a b)K_a$。 □

由上述推论，可见存在一个特殊的基底 e 使得 $K_e=1$，即 $e=a^{\frac{1}{K_a}}$。这个特殊的基底 e 叫做<u>自然对数的基底</u> (base of natural logarithm)，乃是 Euler 所发现者，并把它命名为 e，我想意在要後人不要忘了这是他所发现者也。

【定理 3.3】：$f(x)=ce^x,\ c\neq 0$, 满足微分方程

$$f'(x)=f(x)$$

反之，任何满足上述微分方程的非零函数都是 e^x 的常数倍。

<u>证明</u>：由 $K_e=1$，可知

$$[ce^x]'=c[e^x]'=ce^x$$

反之，设 $f'(x) = f(x)$，则有

$$[e^{-x} \cdot f(x)]' = -e^{-x} \cdot f(x) + e^{-x} \cdot f(x) \equiv 0$$

所以 $e^{-x} \cdot f(x) = c$（常数），亦即 $f(x) = ce^x$。 □

同理，微分方程

$$f'(x) = kf(x)$$

的解都可以表成 $c \cdot e^{kx}$，其中 $c = f(0)$。

【定理 3.4】：e^x 可以用以下幂级数表达，即

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \ldots + \frac{1}{n!}x^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n$$

证明：由 $[e^x]' = e^x$ 易见其 n–阶导数函数还是 e^x。所以泰勒公式中的馀项为

$$R_n = \frac{x_0^{n+1}}{(n+1)!}e^{\xi} \quad （x_0 \text{ 取定，} 0 < \xi < x_0）$$

显然有 $\lim_{n\to\infty} R_n = 0$。 □

【推论】：$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$

$$e = \lim_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^n$$

证明：不难验证 $s_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ 是一个递增数列，而且

$$\lim_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^n = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!}$$ □

符号：通常用 $\ln y$ 表示 $\log_e y$。

【定理 3.5】：$[\ln y]' = \frac{1}{y}$

<u>证明</u>：令 $x = \ln y$，则有 $y = e^x$。再者

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{y}$$

所以 $[\ln y]' = \frac{1}{y}$。 □

【定理 3.6】：当 $|y| < 1$ 时，

$$\ln(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} \mp \ldots = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{y^n}{n}$$

<u>证明</u>：由熟知 $\dfrac{1}{1+t}$ 的几何级数展开式：

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + \ldots + (-1)^{n-1}t^{n-1} + \frac{(-1)^n t^n}{1+t}$$

运用微积分基本定理，左方的积分就是 $\ln(1+y)$；而当 $|y| < 1$ 时，右方馀项的积分就会有下述估计：

$$\left|\int_0^y \frac{(-1)^n t^n}{1+t}dt\right| \le \left|\int_0^y \frac{t^n}{1-|y|}dt\right| = \frac{|y|^{n+1}}{(n+1)(1-|y|)}$$

所以这个馀项的绝对值会随著 n 的增大而趋于 0，因此得出：

$$\ln(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} \mp \ldots = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{y^n}{n}$$ □

3.3 自然对数表的计算法

因为 $\ln(xy) = \ln x + \ln y$，所以我们只需求得所有质数 p 的对数值便可以由此算得其他整数的对数值。由于下述 $\ln(1+x)$ 的幂级数展开式

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} \pm \ldots$$

是一个正负交错的级数，所以我们不妨把上式中的 x 换以 $-x$ 然後将两式相减，即得下述简化了的公式：

$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots)$$

令 $x=\dfrac{1}{2p^2-1}$，则有

$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)&=\ln\frac{2p^2-1+1}{2p^2-1-1}=\ln\frac{p^2}{(p+1)(p-1)}\\&=2\ln p-\ln(p+1)(p-1)\end{aligned}$$

注意当质数 $p>2$ 时，在 $(p-1)$ 和 $(p+1)$ 中出现的质因数皆小于 p，所以如果我们已经求得小于 p 的质数的对数高度近似值，就可以用上式求得 $\ln p$ 的高度近似值：

$$2\ln p=\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)+\ln(p+1)+\ln(p-1)$$

而未知的 $\ln(\frac{1+x}{1-x})$ 是能够有效计算的，因为 $x=\frac{1}{2p^2-1}$ 的绝对值很小。

例如：若我们想构造一个 8 位对数表，则可以依次序地求 $2,3,5,\ldots$ 的对数值。因为後面的对数值会用到前面所得的对数值来计算，所以在开始时 $\ln 2$ 要算得准确一些：

$$\begin{aligned}\ln 2=\ln\left(\frac{1+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}\right)\\&\approx 2\left(\frac{1}{3}+\frac{(\frac{1}{3})^3}{3}+\frac{(\frac{1}{3})^5}{5}+\ldots+\frac{(\frac{1}{3})^{21}}{21}\right)\\&=0.6931471805589\ldots\end{aligned}$$

这个和实际数值 $\ln 2=0.693147180559945\ldots$ 相比其精确度已到达第 11 个位。接著便是要计算 $\ln 3$。令 $x=\frac{1}{2\cdot 3^2-1}=\frac{1}{17}$，则有

$$\ln\left(\frac{1+\frac{1}{17}}{1-\frac{1}{17}}\right)\approx 2\left(\frac{1}{17}+\frac{(\frac{1}{17})^3}{3}+\frac{(\frac{1}{17})^5}{5}+\frac{(\frac{1}{17})^7}{7}\right)=0.117783035654504\ldots$$

所以

$$\ln 3\approx\frac{1}{2}(0.11778303565\ldots+\ln 4+\ln 2)=1.098612288635\ldots$$

这个和实际数值 $\ln 3=1.09861228866811\ldots$ 相比其精确度也到达第 10 个位。

【习题】：

(1) 试证 a^x 的连续性。

(2) 试计算 $\ln 5, \ln 7, \ln 11$，其精确度要有 8 个位。

3.4 复变数指数函数和三角函数

最後我们再将指数函数的定义域扩张到复数的领域。由实数系扩张到复数系，所作者在本质上是用一对实数 a, b 和虚数单元 i 组成一个复数

$$z = a + bi$$

而指数函数的最重要性质乃是 (i) 其指数定则的普遍成立（见[定理 3.1]），(ii) 为微分方程 $f'(x) = kf(x)$ 的通解（见[定理 3.3]）。所以我们可以从这两个性质去探讨复指数的适当定义。

【分析】：(i) 设 e 为自然对数的基底，亦即 Euler 所发现的

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

则有 $\left[e^x\right]' = e^x,\ \left[e^{kx}\right]' = ke^{kx}, k \in \mathbb{R}$。

(ii) 对于复变数 $z = x + iy$ 我们应该定义「e^z」=$e^x \cdot e^{iy}$，所以要点在于如何合理地定义「e^{iy}」。我们所要探索的函数「e^{iy}」应该是一个实变数复值函数，亦即

$$e^{iy} = f(y) + ig(y)$$

而它的微分应该就是

$$\left[e^{kx}\right]' = ke^{kx}$$

推广到 $k = i$ 的情形，亦即

$$f'(y) + ig'(y) = i\big(f(y) + ig(y)\big) = -g(y) + if(y)$$

所以我们所探求的乃是一对实变、实值函数 $\{f(y), g(y)\}$，它们具有关系

$$f'(y) = -g(y), \quad g'(y) = f(y)$$

而且具有初值条件：$f(0)=1,\ g(0)=0$，亦即

$$f(0)+ig(0)=e^0=1$$

【引理 3.3】：设 $\{f(y),g(y)\}$ 为一对连续可微函数并满足

$$f'(y)=-g(y),\ g'(y)=f(y) \quad \text{和} \quad f(0)=1,\ g(0)=0$$

则 $f(y)=\cos y,\ g(y)=\sin y$。

<u>证明</u>：由直接微分可得

$$\frac{d}{dy}(f(y)+ig(y))(\cos y-i\sin y)\equiv 0$$

所以 $f(y)+ig(y)=z_0(\cos y+i\sin y),\ z_0\in\mathbb{C}$ 为复常数。再用初值条件 $f(0)=1,\ g(0)=0$ 即可证得 $z_0=1$。 □

所以 e^{x+iy} 应该定义为

$$e^{x+iy}=e^x(\cos y+i\sin y)$$

再者，由

$$\begin{cases} e^{iy} = \cos y+i\sin y \\ e^{-iy} = \cos y-i\sin y \end{cases}$$

即可解得

$$\begin{aligned}\cos y &= \frac{1}{2}\{e^{iy}+e^{-iy}\}\\ \sin y &= \frac{1}{2i}\{e^{iy}-e^{-iy}\}\end{aligned}$$

这也就是著名的 Euler 公式。

上述 Euler 公式亦提供了一种途径来推广三角函数的定义域，亦即当 $z\in\mathbb{C}$，我们定义

$$\begin{aligned}\cos z &= \frac{1}{2}\{e^{iz}+e^{-iz}\}\\ \sin z &= \frac{1}{2i}\{e^{iz}-e^{-iz}\}\end{aligned}$$

采取上述定义，我们可以逐一验证常见常用的三角公式，例如

$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1$$
$$\cos(z - w) = \cos z \cos w + \sin z \sin w$$

等等。

3.5 复利与指数函数

指数函数还有一个自然的出处，那就是无限细分的复利计算。设本金为 C，某种约定的单位时期的利率是 x。若以单利计算则在单位时期後之所值就是 $C(1+x)$。若把该单位时期等分为 n 个分期，每次以利率 $\frac{x}{n}$ 为分期之利率来计算其复利，则其所值就是

$$P_n(x) = C(1 + \frac{x}{n})^n$$

而且显然有 $P_{2n}(x) > P_n(x)$。[其实也不难验证 $P_{n+1}(x) > P_n(x)$，留作习题。]由此可见，当 n 无限增大，其极限值乃是一种无限细分的连续复利。不难结合前面的讨论证明

$$\lim_{n\to\infty} P_n(x) = C \cdot e^x$$

【习题】：

(1) 设 $k < n$ 是两个给定正整数，试证

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^k}{P_n(x)} = 0$$

(2) 对于任给正整数 k，试证

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^k}{e^x} = 0$$

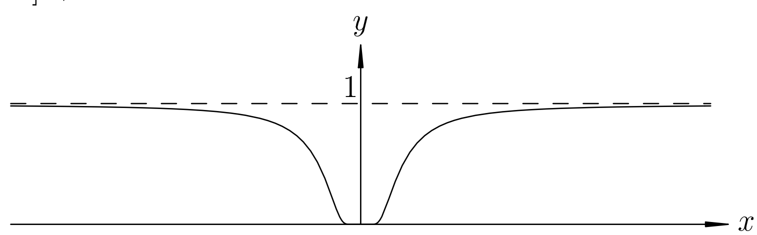
(3) 对于任给正整数 k，试证

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{\sqrt[k]{x}}=0$$

(4) 对于任给的多项式 $f(x)$，试证

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{e^x}=0$$

(5) 令 $f(x)=e^{-\frac{1}{x^2}}$ $(x\neq 0)$，而且 $f(0)=0$。试证 $f(x)$ 是到处无限连续可微的函数而且对于所有正整数 n 皆有 $f^{(n)}(0)=0$，其图象如[图 3–3]所示。



[图 3–3]

(6) 令

$$g(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x>0\\ 0, & x\leq 0\end{cases}$$

试证 $g(x)$ 也是到处无限连续可微的函数。

(7) 令 $h(x)=g(x)\cdot g(1-x)$，则 $h(x)$ 是一个在区间 $[0,1]$ 之外皆恒等于 0 的到处无限连续可微的函数，试证之。

(8) 设 $a_1<a_2<b_2<b_1$。设构造一个在 $[a_1,b_1]$ 之外恒等于 0 而在 $[a_2,b_2]$ 之内恒等于 1 的到处无限连续可微的函数。[提示：试利用上述 $h(x)$ 的积分函数构造之。]

下面让我们来讨论几个重要而且彼此相关的积分：对于任给正实数 $n>0$, Euler 引入下述重要的 Γ–函数，即

$$\Gamma(n)=\int_0^\infty e^{-x}x^{n-1}dx=\lim_{y\to\infty}\int_0^y e^{-x}x^{n-1}dx$$

(9) 试用部分积分公式证明当 $n > 1$ 时

$$\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1)$$

(10) 当 n 是正整数时，试证

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

(11) 试证

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \Gamma(\frac{1}{2})$$

[上述积分是概率论 (probability) 中具有基本重要性的数值，其答案是 $\sqrt{\pi}$，而 $\frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$ 就是极为重要的高斯分布。下面所要讨论的就是如何巧妙地运用指数函数的特性和几何对称性相结合，求解上述积分求值问题。我们把它编列成几个习题以利读者从中体认其中之妙处。]

(12) 试用积分求和的定义和分配律说明

$$\int_{-K}^{K} e^{-x^2} dx \cdot \int_{-K}^{K} e^{-y^2} dy$$

的几何意义就是在 $\square(2K, 2K)$ 之上介于 x–y 坐标面和曲面 $z = e^{-(x^2+y^2)}$ 之间的体积。由此可见

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy \quad \Big(= \Gamma(\frac{1}{2})^2\Big)$$

的几何意义就是那个介于 x–y 坐标面和曲面 $z = e^{-(x^2+y^2)}$ 之间的总体积 V。

(13) 试用上述曲面对于 z–轴的旋转对称性，采用以 z 为对称轴的圆柱薄片之分割，说明其体积为

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{\infty} e^{-r^2} 2\pi r dr \\ &= \pi \int_0^{\infty} e^{-u} du, \quad u = r^2 \\ &= \pi \end{aligned}$$

由此即得证 $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$。

[我们还可以把上述技巧用来求解 n–维欧氏空间中的单位球面的 $(n-1)$–维体积之公式。令其为 ω_n，则已知有 $\omega_2 = 2\pi, \omega_3 = 4\pi$ (Archimedes 定理)。]

(14) 令 $(x_1, \ldots, x_n, z)$ 为 $(n+1)$–维欧氏空间的笛氏正交坐标。试说明

$$(\sqrt{\pi})^n = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x_1^2}dx_1 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x_2^2}dx_2 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x_n^2}dx_n$$

的几何意义就是介于 $z = 0$ 的 n–维坐标面和 n–维超曲面 $z = e^{-(x_1^2+\ldots+x_n^2)}$ 之间的 $(n+1)$–维体积。

(15) 再用上述超曲面的球对称性说明

$$\begin{aligned}
\pi^{\frac{n}{2}} &= \int_0^{\infty} e^{-r^2}(\omega_n r^{n-1})dr \\
&= \frac{1}{2}\omega_n \int_0^{\infty} e^{-u}u^{(\frac{n}{2}-1)}du = \frac{1}{2}\omega_n \Gamma(\frac{n}{2}) \\
\Rightarrow \quad \omega_n &= \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}
\end{aligned}$$

再用[习题 9]和[习题 13]即可写下 ω_n 的明确公式（分成 n 是偶奇这样两种情形）。

第四章

初等函数及其应用举例

函数的范畴是极其多样广泛的。常见常用的多项式函数、三角函数、反三角函数、指数函数和对数函数乃是其中极小部分。因为它们的性质简单，易学好用，所以称之为初等函数。其实它们不但常用好用，而且也是用来研讨其他各种各样有用的非初等函数的基本工具。

4.1 多项式函数

在各种各样函数之中，最为简朴者首推多项式函数。一个给定的多项式函数 $f(x)$，其在 a 点的函数值可以由所给的代数式直接计算而得。再者，一个多项式 $f(x)$ 在 a 点邻近的局部性质的研讨是非常简单明了的。我们可以用替换 $x = a + t$ 把它改写成 t 的升幂多项式，亦即

$$f(x) = f(a+t) = f(a) + c_1 t + c_2 t^2 + \ldots + c_n t^n \tag{4.1}$$

其中 $|t|$ 是足够小者，因而右侧各项的绝对值乃是随著次数的升高而大幅缩小，因此它们的局部影响力显然是高次项要远小于低次项，可以说乃是「阶段分明，一目了然」者也。由此可见，要研究一般函数在 a 点邻近的局部性质的一个好办法就是设法用多项式函数去局部逼近它，从而把所给函数在 a 点的局部性质的研讨，归于其局部逼近多项式的局部性质而研讨之。其实，这也就是「微分学」的基本思想！当所给函数 $f(x)$ 在 a 的邻近是 n–阶连续可微时，泰勒定理所证者，就是

$f(x)$ 在 a 点邻近和下述多项式函数

$$f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \tag{4.2}$$

的差别乃是一个比之于 $|x-a|^n$ 更加微小者也，亦即上述多项式乃是 $f(x)$ 在 a 点的邻近的 n–阶局部逼近。其实，这也就是一个函数 $f(x)$ 是 n–次连续可微和它在给定点 a 的 $\{f^{(k)}(a), 1\leq k\leq n\}$ 的实质内涵。所以微分的真谛在于「局部多项式化」。本节将对多项式的常用基本性质和某些初步应用作一简述。其中关于多项式的唯一性定理与插值公式以及单元多项式的除法与辗转相除法求最高公因式这两点业已在 §1.3.1 和 §1.3.2 这两小节讨论过了。再者，在 §1.3.3 节所证的 Sturm 定理和 §1.3.4 节所证的代数基本定理则分别是实变多项式和复变多项式的基本定理，它们是实数连续性在代数学中的重要应用。

4.1.1 n–阶密切多项曲线

设 $g(x)$ 是一个在 a 点连续可微的函数，则其在 $A=(a,g(a))$ 点的切线乃是过曲线上邻近一点 $B=(b,g(b))$ 的割线 AB 在 $b\to a$ 的极限，即

$$y=g(a)+g'(a)(x-a) \tag{4.3}$$

现设 $g(x)$ 是一个在 a 点邻近 n–阶连续可微者。在 a 点邻近取相异之 $(n+1)$ 点 $\{a_0=a, a_j, 1\leq j\leq n\}$，则唯一存在著一条次数至多为 n 的多项曲线，它过曲线 $y=g(x)$ 上的 $(n+1)$ 点 $\{A_j=(a_j,g(a_j)), 0\leq j\leq n\}$。试问当 $\{a_j, 1\leq j\leq n\}$ 都趋于 $a_0=a$ 时，上述多项曲线是否有唯一的极限曲线？若有，则可称之谓曲线 $y=g(x)$ 在 $A=(a,g(a))$ 点的 <u>n–阶密切多项曲线</u>，它是切线的自然高阶推广。在 $n=1$ 的情形，割线的方程式就是

$$y=g(a)+g'(\xi)(x-a),\quad a<\xi<b\ (\text{或 } b<\xi<a) \tag{4.4}$$

所以当 $b\to a$ 时，显然那个夹逼于 a,b 之间的 ξ 也趋于 a 为其极限，再由 $g'(x)$ 在 a 的连续性即有 $g'(\xi)\to g'(a)$。由此可见，$n=1$ 的情形乃是微分均值定理的直接推论。由此可以想到上述高阶密切多项曲线的唯一存在性，理当是高阶微分均值定理（亦即泰勒公式）的推论。

为了便于论证，我们不妨设 $a=0$ 而不失其所证的一般性 (without loss of generality)。由公式 (1.33) 那个过 $\{A_j=(a_j,g(a_j)),0\le j\le n\}$ 的多项曲线的方程式乃是

$$\left|\begin{matrix} -y & 1 & x & \dots & x^n \\ -g(0) & 1 & a_0 & \dots & a_0^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -g(a_j) & 1 & a_j & \dots & a_j^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -g(a_n) & 1 & a_n & \dots & a_n^n \end{matrix}\right| = 0 \quad (a_0=0) \tag{4.5}$$

让我们先考虑 $a_1\to 0$ 而其他 $a_j, 2\le j\le n$, 暂且维持不动的极限曲线。当我们在 (4.5)–式中把第三行 (third row) 换成其极限值 $(-g(0),1,0,\dots,0)$ 时，行列式的第二、第三行变成相同者，所以 (4.5)–式蜕化成 $0\equiv 0$。因此在求 $a_1\to 0$ 的极限曲线时，我们必须先行找出使得 (4.5)–式蜕化的原由而先行排除之，然後才能求其极限而不致于落空成全然无用的「$0\equiv 0$」。将均值定理和行列式的基本性质作如下结合，就可以把 (4.5)–式中的第三行先改换成

$$(-g(a_1)+g(0),0,a_1,\dots,a_1^n) \tag{4.6}$$

然後再用均值定理把它改写成

$$(-a_1g'(\xi_1),0,a_1,\dots,a_1^n) \tag{4.6$'$}$$

其中 ξ_1 乃是夹逼于 0 和 a_1 之间者。因此我们就成功地找出 (4.5)–式在 $a_1\to 0$ 之下蜕化的原由，因为它含有 a_1 因子。所以我们只要先把 a_1 先行除去，然後再求 $a_1\to 0$ 的极限，即可得其极限曲线之方程式，它就是把 (4.5)–式中的第三行换成

$$(-g'(0),0,1,0,\dots,0) \tag{19$_3$}$$

者也。有了上述初步成功的经验，我们当然还可以把上述所得的 (19)–式中的第四行先行改换成

$$(-g(a_2)+g(0)+a_2g'(0),0,0,a_2^2,\dots,a_2^n) \tag{4.8}$$

然後再用 2–阶均值定理把它改写成

$$(-\frac{a_2^2}{2!}g''(\xi_2), 0, 0, a_2^2, \ldots, a_2^n) \tag{4.9}$$

其中 ξ_2 乃是夹逼于 0 和 a_2 之间者。如此所得者可以提出公因子 a_2^2，所以我们只要先行把它除去然後再求 $a_2 \to 0$ 的极限，就可以得其极限曲线之方程式，它就是把 (19)–式中的第四行换成

$$(-\frac{1}{2!}g''(0), 0, 0, 1, 0, \ldots, 0) \tag{$(22)_4$}$$

者也。如此逐次运用行列式的基本性质和高阶均值定理，计算让 a_k, $3 \le k \le n$, 依次趋于 0 的极限方程式，即可得 n–阶密切多项曲线的方程式如下，即

$$\begin{vmatrix} -y & 1 & x & x^2 & \ldots & \ldots & x^n \\ -g(0) & 1 & 0 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ -g'(0) & 0 & 1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ldots & 0 \\ -\frac{g^{(k)}(0)}{k!} & 0 & \ldots & 0 & 1 & 0\ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -\frac{g^{(n)}(0)}{n!} & 0 & \ldots & 0 & \ldots & \ldots 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \tag{4.11}$$

将 (4.11)–式的行列式按第一列展开，即得

$$-y + g(0) + g'(0)x + \frac{g''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{g^{(k)}(0)}{k!}x^k + \ldots + \frac{g^{(n)}(0)}{n!}x^n = 0 \tag{4.11$'$}$$

上述计算证明了曲线 $y = g(x)$ 在 a 点的 n–阶密切多项曲线的唯一存在性，而且它的方程式就是下述 (4.11″)（只要 $g(x)$ 在 a 点邻近是 n 次连续可微的）。

$$\begin{aligned} y = g(a) \, + \, g'(a)(x-a) + \frac{g''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots \\ + \frac{g^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \ldots + \frac{g^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \end{aligned} \tag{4.11$''$}$$

上式的右侧也就是 $g(x)$ 在 a 点邻近的 n–阶局部逼近多项式。

4.1.2 高阶局部逼近与不定式之极限

当一个多项式 $f(x)$ 含有 $(x-a)$ 因式，则显然有 $f(a)=0$。而上述命题的逆命题也成立则是初等代数中一个易证而且常用的「馀式定理」。上述基本而且好用的事实不难通过高阶可微函数的多项式高阶局部逼近，推广到高阶可微函数的范畴，亦即

一个局部高阶可微函数 $f(x)$ 含有 $(x-a)^k$ 因子的充要条件是 $f(a)=f'(a)=\ldots=f^{(k-1)}(a)=0$，而且它的局部表达式可以写成

$$f(x)=(x-a)^k\frac{f^{(k)}(\xi)}{k!} \tag{4.12}$$

其中 ξ 是一个适当的介于 a, x 之数值。

这其实就是 k–阶 Taylor 公式的特殊情形。再者，若 $f^{(k)}(a)\neq 0$，则 $(x-a)^k$ 乃是局部函数 $f(x)$ 所含有的 $(x-a)^\alpha$ 因子的最高次者。我们将称 $f(x)$ 为一个在 a 的邻近的 k–阶微量。

设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 分别是在 a 的邻近的 k–阶和 ℓ–阶微量。在研讨两者比值在 $x\to a$ 的极限值时，自然要先行约去两者所共有的 $(x-a)$ 因子，亦即

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\begin{cases}(x-a)^{k-\ell}\dfrac{\ell!f^{(k)}(\xi)}{k!g^{(\ell)}(\eta)}, & k>\ell\\ \dfrac{f^{(k)}(\xi)}{g^{(\ell)}(\eta)}, & k=\ell\\ \dfrac{1}{(x-a)^{\ell-k}}\dfrac{\ell!f^{(k)}(\xi)}{k!g^{(\ell)}(\eta)}, & k<\ell\end{cases} \tag{4.13}$$

由此易见

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\begin{cases}0, & k>\ell\\ \dfrac{f^{(k)}(a)}{g^{(k)}(a)}, & k=\ell\end{cases} \tag{4.14}$$

而在 $k<\ell$ 的情形则上述极限不存在。这也就是通常在初等微积分中用 l'Hospital Rule 求不定式之极限之所基，乃是 Taylor 公式的直接推论。

【例子】：

1. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$
2. $\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}=-\frac{1}{2}$
3. $\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\frac{1}{6}$
4. $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{\sin x}=1$

4.1.3 插值问题的推广

设 $y=f(x)$ 是一个连续可微函数的图象，而 $P_i(x_i,f(x_i)), 1\le i\le \ell$, 则是其上给定的相异 ℓ 个点。试求一个次数至多为 $2\ell-1$ 的多项曲线 $y=g(x)$，它和 $y=f(x)$ 相切于上述 ℓ 点，亦即有

$$g(x_i)=f(x_i),\quad g'(x_i)=f'(x_i),\quad 1\le i\le \ell \tag{4.15}$$

[因为上述给定条件式的个数是 2ℓ，而次数至多为 $2\ell-1$ 的多项式的维数也是 2ℓ。所以上述求解问题理当是有解的。]

其实，我们还可以把上述问题更加推广如下：

设 $y=f(x)$ 是一个 k–阶连续可微函数的图象而 $P_i(x_i,f(x_i)), 1\le i\le \ell$, 则是其上给定的相异 ℓ 个点。试求一个次数至多为

$$\sum_{i=1}^{\ell}k_i+(\ell-1),\quad 0\le k_i\le k$$

的多项曲线 $y=g(x)$，它和 $y=f(x)$ 在 P_i 点分别是 k_i–阶密切相交，亦即有

$$g(x_i)=f(x_i),\dots,g^{(k_i)}(x_i)=f^{(k_i)}(x_i)\quad (1\le i\le \ell) \tag{4.16}$$

[上述条件式的个数乃是 $\sum_{i=1}^{\ell}(k_i+1)$。]

【分析】：

上述问题乃是插值问题和密切多项曲线问题的自然结合；而密切 k_i–阶则乃是把 (k_i+1) 个交点缩合到一个点的极限情形。由此可见，上述问题是可以由下述途径去求解的，即先在每个 P_i 的邻近再取 $y=f(x)$ 上之 k_i 点，令其为 $\{P_{i,j}=(x_{i,j},f(x_{i,j})),1\le j\le k_i\}$。我们可以用插值公式 (1.33) 写下过上述总共有 $\sum_{i=1}^{\ell}(k_i+1)$ 个点的多项曲线的方程式，然後再用 §1.1 节求密切多项曲线的办法，结合行列式的性质和 Taylor 公式去求得 $\{P_{i,j},1\le j\le k_i\}$ 都趋于 P_i 为极限的极限方程式。兹以 $i=3$, $k_1=2$, $k_2=1$, $k_3=0$ 的情形写下其所得的极限方程式如下：

$$
\begin{vmatrix}
-y & 1 & x & x^2 & x^3 & x^4 & x^5 \\
-f(x_1) & 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & x_1^4 & x_1^5 \\
-f'(x_1) & 0 & 1 & 2x_1 & 3x_1^2 & 4x_1^3 & 5x_1^4 \\
-f''(x_1) & 0 & 0 & 2 & 6x_1 & 12x_1^2 & 20x_1^3 \\
-f(x_2) & 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 & x_2^4 & x_2^5 \\
-f'(x_2) & 0 & 1 & 2x_2 & 3x_2^2 & 4x_2^3 & 5x_2^4 \\
-f(x_3) & 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 & x_3^4 & x_3^5
\end{vmatrix} = 0 \tag{4.17}
$$

【习题】：试验证上述多项曲线满足下列条件，即

$$y'\Big|_{x_1}=f'(x_1),\quad y''\Big|_{x_1}=f''(x_1),\quad y'\Big|_{x_2}=f'(x_2)$$

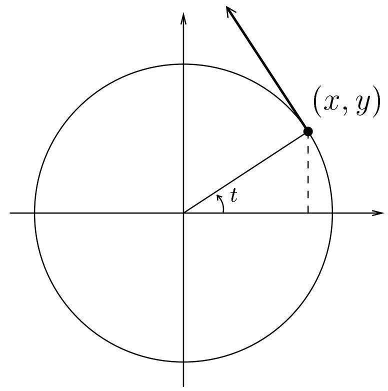
而且过 $P_i(x_i,f(x_i))$, $1\le i\le 3$, 这三点。

4.2 三角函数与反三角函数

正弦、馀弦函数是定量研讨几何不可或缺的基本函数，它们是解析描述圆与角，三角形的角边关系中自然产生者。用现代的观点来说，如 [图 4–1] 所示

$$x=\cos t,\quad y=\sin t$$

就是单位圆上单位等速运动的动态描述。

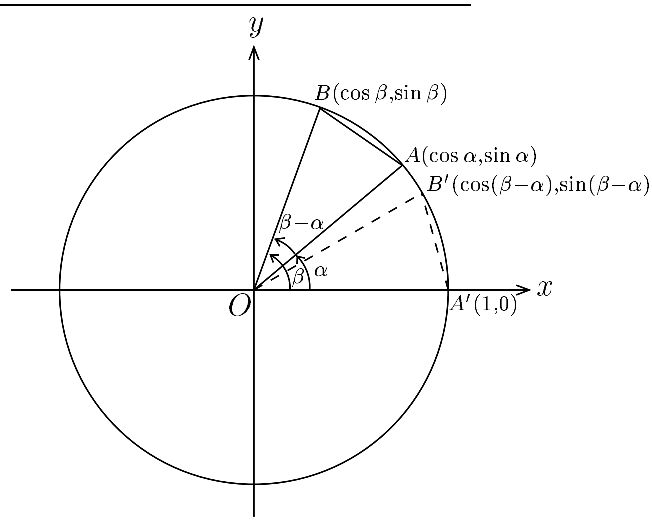


[图 4–1]

正弦、馀弦函数乃是一对用来描述单位圆的函数。而圆的本质则在于其完美的对称性，亦即其旋转对称性和对于每一个直径的反射对称性。是以正弦、馀弦函数的基本性质，其实也就是圆的对称性的解析表现。

4.2.1 圆的对称性与正弦、馀弦函数的基本性质

(i) <u>圆的对称性与正弦、馀弦函数的和角公式</u>：



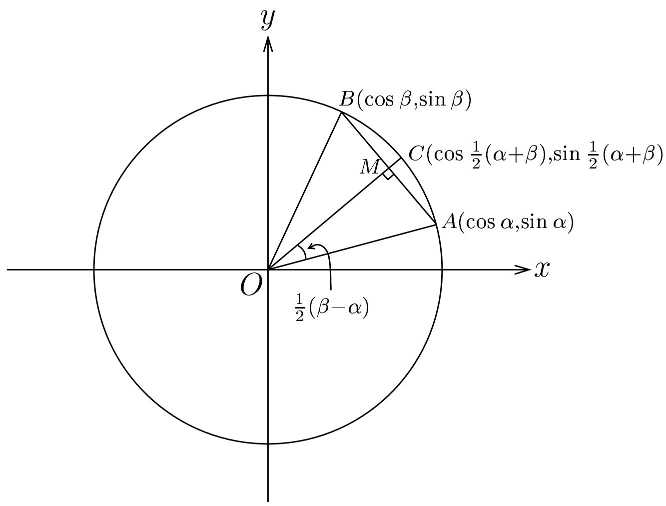
[图 4–2]

如 [图 4–2] 所示，由圆的旋转对称性可见 $A = (\cos\alpha, \sin\alpha)$ 和 $B = (\cos\beta, \sin\beta)$ 之间的距离之平方仅仅和 $(\beta - \alpha)$ 有关，亦即

$$\begin{aligned}\overline{AB}^2 &= (\cos\beta - \cos\alpha)^2 + (\sin\beta - \sin\alpha)^2 \\ &= (\cos(\beta - \alpha) - 1)^2 + \sin^2(\beta - \alpha) = \overline{A'B'}^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \quad \cos(\beta - \alpha) &= \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \\ \Rightarrow \quad \cos(\beta + \alpha) &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \\ \Rightarrow \quad \sin(\beta - \alpha) &= \cos(\frac{\pi}{2} - \beta + \alpha) \\ &= \cos\alpha\cos(\frac{\pi}{2} - \beta) - \sin\alpha\sin(\frac{\pi}{2} - \beta) \\ &= \cos\alpha\sin\beta - \sin\alpha\cos\beta \\ \Rightarrow \quad \sin(\beta + \alpha) &= \cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta\end{aligned}$$

(ii) <u>反射对称性与和化积公式</u>



[图 4–3]

如 [图 4–3] 所示，等腰三角形 $\triangle OAB$ 对于 OM 成反射对称：

$$\overrightarrow{OM} = = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) = (\frac{1}{2}(\cos\alpha + \cos\beta), \frac{1}{2}(\sin\alpha + \sin\beta))$$

$$\overrightarrow{OM} = \cos\frac{1}{2}(\alpha - \beta) \cdot \overrightarrow{OC}, \quad \overrightarrow{OC} = (\cos\frac{1}{2}(\alpha + \beta), \sin\frac{1}{2}(\alpha + \beta))$$

所以即有

$$\frac{1}{2}(\cos\alpha+\cos\beta) = \cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$$
$$\frac{1}{2}(\sin\alpha+\sin\beta) = \cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$$

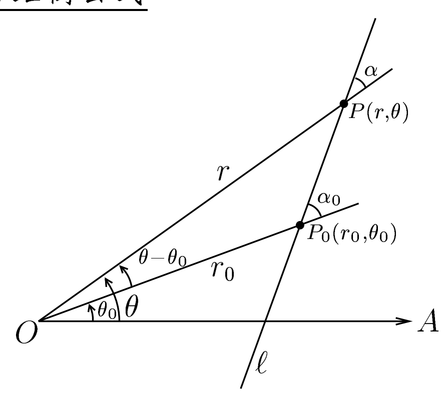
这也就是和化积公式。

4.2.2 三角定律与极坐标

一个三角形的三个角度和三个边长乃是它的六个基本几何量，而三角形的诸多叠合条件则说明六者之间是具有相互关联的函数关系的。这也就是熟知的正弦定律和馀弦定律，即

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c} = \frac{2\triangle}{abc}$$
$$\begin{cases} \cos A = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \\ \cos B = \dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac} \\ \cos C = \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab} \end{cases}$$

<u>极坐标的直线方程与距离公式</u>：



[图 4–4]

如 [图 4–4] 所示，过 $P_0(r_0,\theta_0)$ 点而且和矢径 $\overline{OP_0}$ 的夹角为 α_0 的直

线方程式，可以用 $\triangle OP_0P$ 的正弦定律求之如下：

$$\frac{\sin(\pi-\alpha_0)}{r}=\frac{\sin\alpha}{r_0},\quad \alpha_0=\alpha+\theta-\theta_0$$
$$\Rightarrow r\sin(\alpha_0+\theta_0-\theta)=r_0\sin\alpha_0$$

再者 $P_0(r_0,\theta_0)$ 和 $P(r,\theta)$ 之间的距离平方则可以用 $\triangle OP_0P$ 的馀弦定律计算如下，即

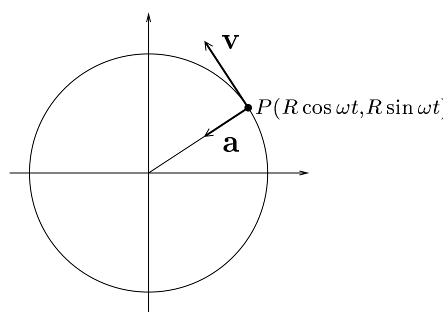
$$\overline{P_0P}^2=r^2+r_0^2-2rr_0\cos(\theta-\theta_0)$$

4.2.3 等速圆周运动与正弦、馀弦的微分

$$x=R\cos\omega t,\quad y=R\sin\omega t$$

所描述者乃是一个以原点为圆心，半径为 R 的圆上的运动，其角速度等于常数 ω。其速度向量和加速度向量分别为

$$\mathbf{v}=\left(\frac{dx}{dt},\frac{dy}{dt}\right)=\omega R(-\sin\omega t,\cos\omega t)$$
$$\mathbf{a}=\left(\frac{d^2x}{dt^2},\frac{d^2y}{dt^2}\right)=-\omega^2R(\cos\omega t,\sin\omega t)$$



[图 4–5]

由此可见，其向心加速度的大小等于 $R\omega^2$。令 $z(t)=\cos t+i\sin t$，则易见它满足微分方程

$$\frac{d}{dt}z(t)=-\sin t+i\cos t=iz(t)$$

显然它的（复）常数倍，$(A+iB)z(t)$，也满足同样的微分方程。

【定理 4.1】：设复值非零实变函数 $w(t)=f(t)+ig(t)$ 满足常微分方程

$$\frac{d}{dt}w(t)=iw(t)$$

则存在著适当的 $(A+iB)$ 使得

$$\begin{aligned} w(t) &= (A+iB)(\cos t+i\sin t) \\ &= \sqrt{A^2+B^2}\left(\cos(t+\tan^{-1}\frac{B}{A})+i\sin(t+\tan^{-1}\frac{B}{A})\right) \end{aligned}$$

证明：令 $\varphi(t)=w(t)(\cos t-i\sin t)$，由所设即有

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\varphi(t) &= \left[\frac{d}{dt}w(t)\right](\cos t-i\sin t)+w(t)(-\sin t-i\cos t) \\ &= iw(t)(\cos t-i\sin t)-i\omega(t)(\cos t-i\sin t) \\ &\equiv 0 \end{aligned}$$

亦即 $\varphi(t)$ 乃是一个（复）常数 $(A+iB)$。 □

【定理 4.2】：正弦、馀弦函数可以用下述幂级数表达，即有

$$\begin{aligned} \sin x &= x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5\mp\dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1} \\ \cos x &= 1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4\mp\dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n)!}x^{2n} \end{aligned}$$

或者可以将上述两个公式合写成

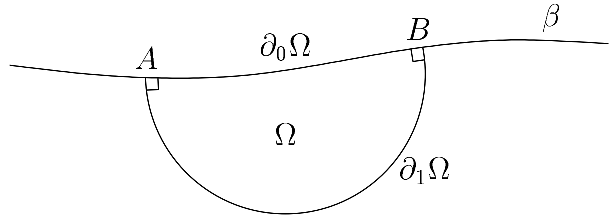
$$\cos x+i\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(ix)^n$$

证明：当 $f(x)$ 是 $\sin x$ 或 $\cos x$ 时，易见 $f^{(4)}(x)$ 就是 $f(x)$ 本身，而且其泰勒公式中的馀项 R_n 在 $n\to\infty$ 时显然趋于 0。 □

4.2.4 等周问题 (Isoperimetric Problem)

设 Ω 是平面（或半球面，或非欧面）上的一个区域，$\partial\Omega$ 是它的周边，通常以 $|\Omega|$ 和 $|\partial\Omega|$ 分别表示其面积和长度。等周问题所研讨者乃是在所有周长取某一定值的各种各样区域之中，以那种区域的面积为极大？其实，还有另外两种等周问题，亦即下述具有给定边界的等周问题和具有给定边界而且固定其端点或端点之一的等周问题，而原先者则称之谓无边界的等周问题。

【具有给定边界的等周问题】：设 β 是一条给定的边界，如 [图 4–6] 所示，Ω 是一个位于 β 的给定一侧，借用 β 为其部份周边的区域。[例如当年希腊神话中的 Queen Dido，在北非以地中海的一段海岸为自然屏障构筑城墙所围成的城区。]



[图 4–6]

令 $\partial_0\Omega$ 和 $\partial_1\Omega$ 分别是 $\partial\Omega$ 中属于和不属于 β 者。求解 $|\partial_1\Omega|$ 取某一定值的区域之中，$|\Omega|$ 取极大值者。

【具有给定边界和端点的等周问题】：假如在上述极值问题之中，我们还加以 $\partial_1\Omega$ 的两个端点（或其中之一）为某两（或某一）取定点的限制，则称之为具有给定边界和端点的等周问题。[设想当年 Queen Dido 所在的北非地中海海岸，恰好有一个或两个相距适中的小山丘。则基于有利于防守的考量，很自然会选用它们作为构筑城墙（亦即 $\partial_1\Omega$）的端点，是不？]

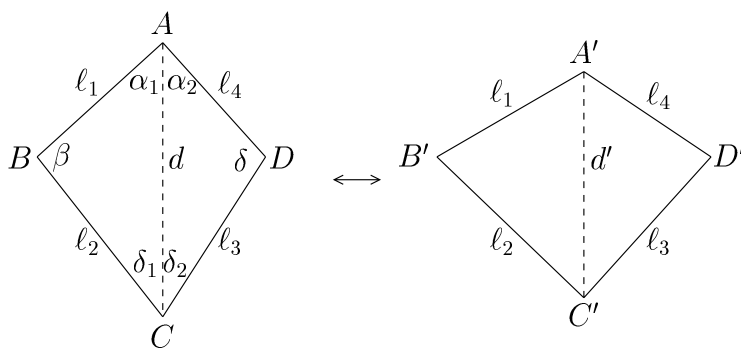
总之，等周问题很自然地有三种情形，亦即平面、半球面和非欧面这三种情形；而且在每一种情形下，又具有三个类型，亦即无边界，具有给定边界和具有给定边界和端点这样三种提法。由此可见，总共有九个类同但是各异的等周问题，它们都是几何学中自然而且重要的极值问题。而它们的解答就是：

> Ω 是第一类（或第二类，第三类）等周问题之解的充要条件
> 乃是 $\partial\Omega$（或 $\partial_1\Omega$）是给定周长的圆（或给定长度的圆弧），
> 而且第二类的等周解 $\partial_1\Omega$ 还必须和给定边界 β 正交。

自古以来，等周问题一直是一个引人入胜的课题，所以有不少数学家对它提出各种各样的证明，不胜枚举。而且它们所适用的广度和所需要的假设也各有不同。但是大家所追寻的「皓的」，乃是那种既简朴初等又具有普遍适用性的统一证法。以下所讨论的初等证明，乃是一个普遍适用于上述九种等周问题的统一证法；在这里我们暂且只集中讨论在欧氏平面的情形。这个证明的关键就是下述十分初等的极值问题之解的共圆性。

一个初等的基本引理：

一个三角形的三边边长业已构成其一组叠合条件，所以三角形的面积当然业已由其三边边长所唯一确定，而用其边长去表达面积的公式也就是秦九韶公式（亦即海伦公式）。但是给定四边边长的四边形，还可以如 [图 4–7] 所示，作那种变更其对角线长的变形，所以它们的面积并非由给定边长所唯一确定，而是由给定边长和一条选定的对角线长所唯一确定（例如 [图 4–7] 所示的 $d = \overline{AC}$）。



[图 4–7]

由此可见，上述四边边长取定不变的四边形的面积乃是其一条选定的对角线长的函数。这个函数在什麽情形之下得极大值呢？这乃是欧氏平面几何学中一个既初等又基本的极值问题。

【基本引理】：在四边边长给定的四边形中，其面积在内接于圆时为极大（亦即其四个顶点共圆者也）。

证明：令 $\triangle_1$ 和 $\triangle_2$ 分别为 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ACD$ 的面积，β 和 δ 分别为 B 和 D 点的内角。再者，以 $x = d^2$ 为自变数，则有

$$\begin{gathered} 2\ell_1\ell_2\cos\beta = \ell_1^2 + \ell_2^2 - x \\ 2\ell_3\ell_4\cos\delta = \ell_3^2 + \ell_4^2 - x \\ \triangle_1 = \tfrac{1}{2}\ell_1\ell_2\sin\beta, \quad \triangle_2 = \tfrac{1}{2}\ell_3\ell_4\sin\delta \end{gathered} \tag{4.18}$$

将上列各式分别对于 x 求微分，即得

$$\begin{aligned} 2\ell_1\ell_2\sin\beta\frac{d\beta}{dx} = 1 \quad &\Rightarrow \quad \frac{d\beta}{dx} = \frac{1}{2\ell_1\ell_2\sin\beta} \\ 2\ell_3\ell_4\sin\delta\frac{d\delta}{dx} = 1 \quad &\Rightarrow \quad \frac{d\delta}{dx} = \frac{1}{2\ell_3\ell_4\sin\delta} \\ \frac{d\triangle_1}{dx} + \frac{d\triangle_2}{dx} &= \frac{1}{2}\ell_1\ell_2\cos\beta\frac{d\beta}{dx} + \frac{1}{2}\ell_3\ell_4\cos\delta\frac{d\delta}{dx} \\ &= \frac{1}{4}(\cot\beta + \cot\delta) \end{aligned} \tag{4.19}$$

由此即见 $\triangle_1 + \triangle_2$ 得极大值的条件乃是

$$\cot\beta + \cot\delta = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \beta + \delta = \pi \tag{4.20}$$

亦即四边形 $\square ABCD$ 内接于圆。 □

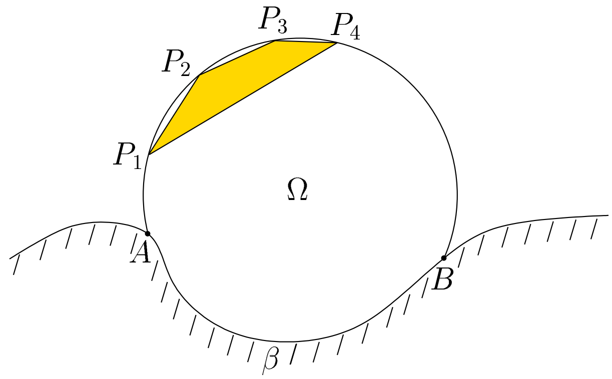
等周问题的一个初等证明（欧氏平面情形）：

如上所述，等周问题共有九种类型，而相应的九种等周解，它们都具有简洁完美的共性，那就是其边界的「非给定」部份（亦即 $\partial\Omega$ 或 $\partial_1\Omega$）乃是给定长度的圆弧。现在我们要讨论的欧氏平面等周解的「圆性」(circularity) 的证明，其实含有下述唯一性和存在性这样两个方面，即

唯一性：在 Ω 是某一种的等周解的假设之下，证明 $\partial\Omega$（或 $\partial_1\Omega$）必须是给定长度的圆弧。

存在性：证明某一种的等周问题的极大面积解是的确存在的。

唯一性的证明：如 [图 4–8] 所示，设 Ω 乃是欧氏平面中给定边界和端点的等周解。



[图 4–8]

在 $\partial_1\Omega$ 上任取邻近四点 $\{P_i, 1 \le i \le 4\}$。易见四边形内接于 Ω。假若不然，则可用反射对称把位于四边形内部的 $\partial_1\Omega$ 之弧段，改用其对称弧段。如此所得的区域 Ω' 显然有 $|\partial_1\Omega'| = |\partial_1\Omega|$，但是 $|\Omega'| > |\Omega|$，所以是和 Ω 本身乃是一个等周解之所设矛盾！再者，$\{P_i, 1 \le i \le 4\}$ 四点必须是共圆的！假若不然，则可以把 Ω 作下述变形，它把 Ω 中位于 $\Box P_1P_2P_3P_4$ 之外的部份保持原样，而把 $\Box P_1P_2P_3P_4$ 改用具有同样边长但是其四顶点共圆的 $\Box P_1'P_2'P_3'P_4'$。如此所得的 Ω' 显然保持 $|\partial_1\Omega'| = |\partial_1\Omega|$，但是由基本引理，又有

$$|\Omega'| - |\Omega| = \Box P_1'P_2'P_3'P_4' - \Box P_1P_2P_3P_4 > 0 \tag{4.21}$$

这是和 Ω 本身乃是等周解之所设相矛盾的。再者，因为 $\{P_i, 1 \le i \le 4\}$ 是 $\partial_1\Omega$ 上任选的邻近四点，所以它们总是共圆只有在 $\partial_1\Omega$ 本身就是一个圆弧才可能。这也就是用基本引理，直截了当地证明了等周解的唯一性。 □

<u>存在性的证明</u>：让我们先来讨论具有给定边界和端点的等周解的存在性的证明。设 $\mathcal{F}$ 是所有满足条件 $|\partial_1\Omega| = \ell_0$ 而且 $\partial_1\Omega$ 以 β 上的给定点 A、B 为其端点的区域 Ω 所组成的集合。令

$$M = l.u.b.\,\{|\Omega|;\ \Omega \in \mathcal{F}\} \tag{4.22}$$

存在性的证明要点在于论证 $\mathcal{F}$ 中<u>的确存在</u>著一个 Ω^* 其面积等于上述极小上界 M。我们将再用前述的基本引理来证上述存在性如下：

由 M 的定义，$\mathcal{F}$ 中显然存在一个序列 $\{\Omega_n\}$ 使得

$$\lim_{n\to\infty} |\Omega_n| = M \tag{4.23}$$

再者，由所设 $|\partial_1\Omega_n| = \ell_0$。我们可以把 $\partial_1\Omega_n$ 用其上的 $2^n - 1$ 点 $\{P_{n,i}, 1 \le i \le 2^n - 1\}$ 分隔成长度为 $\frac{\ell_0}{2^n}$ 的分段。在 n 相当大时，上述分段是十分微短者，所以我们可以用上述唯一性的证明中所用的变形，把原给的 Ω_n 变换成上述 2^n–等分点共圆的区域 Ω'_n，它显然还是属于 $\mathcal{F}$ 者，而且 $|\Omega'_n| \ge |\Omega_n|$（等号只有在 $\Omega'_n \cong \Omega_n$ 时才成立）。总之，我们将改用序列 $\{\Omega'_n\}$，显然依然有 $\lim_{n\to\infty} |\Omega'_n| = M$。再者，令 Γ_n 为以 A, B 点为其端点而且和 Ω'_n 相交于其所有 2^n–等分点的圆弧，不难看到

$$\lim_{n\to\infty} |\Gamma_n| = \ell_0 \tag{4.24}$$

再者，$\{\Gamma_n\}$ 趋于那个弧长为 ℓ_0，以 A, B 为端点，而且和 Ω'_n 居于 β 的同侧的唯一圆弧 Γ^* 为其极限。令 Ω^* 为以 Γ^* 为 $\partial_1\Omega^*$ 的区域，易见 $|\Omega^*| = M$。这也就证明了第三类形的等周解的存在性。 □

其实，上面这种证法是很容易直接推广成第一、第二类等周解的存在性的证明的。例如我们只要把 β 取成一条测地线，A、B 取成十分靠近的两点，然後再把上述业已证明其存在性的第三类等周解，求其在 A、B 的距离趋于 0 的极限，即可得出第一类等周解的存在性。再者，第二类等周解的存在性是有赖于边界 β 的某种几何性质的。此事可以用第三类等周解，再让端点 A, B 在 β 上任意变动，去求解其极大值。这也就是 $\partial_1\Omega$ 和 β 正交这个必要条件的来由。

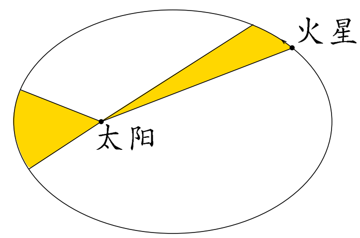
【总结】：上述证明把三种类型等周问题的论证，简明扼要地归结到所证的基本引理，亦即给定边长的四边形以内接于圆者面积为极大。上述简短的论证，直截了当地说明了等周解周边的「圆性」乃是上述初等极值解的顶点共圆性的直接推论。至于在半球面和非欧面的情形，我们也有同样的基本引理，所以其等周解周边的「圆性」也同样是这个基本引理的直接推论。

4.2.5 Kepler 行星运行三定律及其数理分析

Kepler 行星运行三定律清楚地描述了在当年所知的六个行星（包括地球）运行的简单模式：

【第一定律】：火星绕太阳以一个以太阳位于其焦点之一的椭圆运行。

【第二定律】：在单位时间内，火星和太阳连线所扫过的面积恒相等，如 [图 4–9] 所示。



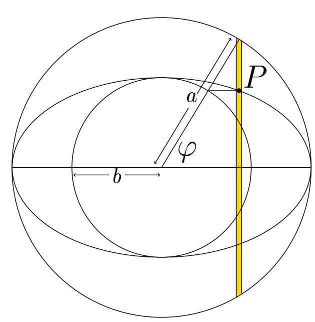
[图 4–9]

【第三定律】: 各个行星不但也满足同样的第一、第二定律，而且其椭圆轨道长径的立方和周期的平方之间的比值皆相等。

一个自然的问题就是：「为什麽行星会以太阳为其一焦点的椭圆轨道运行？」牛顿对这个问题给了一个直接的答案，即行星与太阳之间存在满足平方反比定律(inverse square law) 的引力。而且这种引力同样地存在于任何两个物体之间，不论是火星与太阳或是苹果与地球，都是同一种引力；这就是牛顿著名的万有引力定律。现在让我们以现今的符号体系来重新看看牛顿这个对後世科学发展有著深远影响的工作。首先我们需要对椭圆的几何性质有一定的了解。

（一）<u>椭圆面积公式：椭圆面积 $=\pi ab$</u>

设椭圆的长、短径分别为 $2a, 2b$。现构造两个圆，半径分别为 a, b，并把椭圆夹于两者之间，如 [图 4–10] 所示。



$$P = P(x,y)$$
$$x = a\cos\varphi$$
$$y = b\sin\varphi$$

[图 4–10]

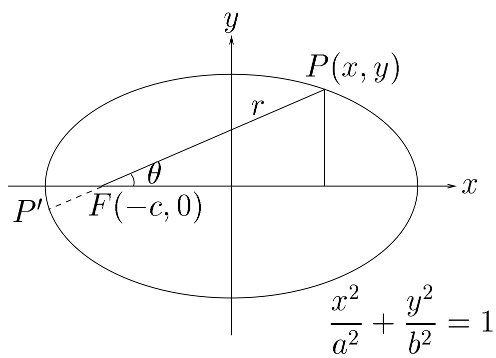
计算在 [图 4–10] 中那条过 $P(x,y)$ 的窄条面积。由于 $x = a\cos\varphi, y = b\sin\varphi$，在椭圆内的窄条面积和整条窄条面积的比率约为：

$$\frac{2b\sin\varphi\,\Delta x}{2a\sin\varphi\,\Delta x} = \frac{b}{a}$$

这是一个与 $P(x,y)$ 位置无关的常数。当把所有这种窄条的面积加起来时，便得

$$\text{椭圆面积} = \pi a^2 \cdot \frac{b}{a} = \pi ab$$

（二） 椭圆的极坐标方程式



[图 4–11]

如 [图 4–11] 所示，椭圆上任意一点 P 有 (x,y) 和 (r,θ) 两种表示方法，而 (x,y) 和 (r,θ) 之间的转换可以用

$$r\cos\theta = x + c, \quad r\sin\theta = y$$

来达成。把上面转换方法代入熟知的椭圆坐标方程式 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$，即得

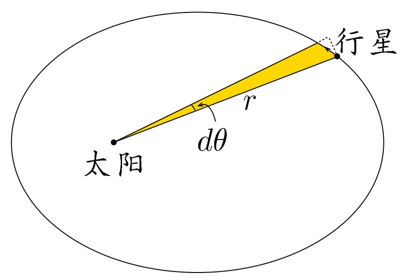
$$\begin{aligned}
b^2(r\cos\theta - c)^2 + a^2(r\sin\theta)^2 - a^2b^2 &= 0 \\
b^2(r^2\cos^2\theta - 2cr\cos\theta + c^2) + a^2r^2(1-\cos^2\theta) - a^2b^2 &= 0 \\
(b^2-a^2)r^2\cos^2\theta - 2b^2cr\cos\theta + b^2c^2 + a^2r^2 - a^2b^2 &= 0 \\
-c^2r^2\cos^2\theta - 2b^2cr\cos\theta - b^4 + a^2r^2 &= 0 \quad (a^2 = b^2 + c^2) \\
a^2r^2 - \left(rc\cos\theta + b^2\right)^2 &= 0 \\
\left[ar - (rc\cos\theta + b^2)\right]\left[ar + (rc\cos\theta + b^2)\right] &= 0
\end{aligned}$$

因此 $r=\dfrac{b^2}{a-c\cos\theta}$（注：$r=\dfrac{-b^2}{a+c\cos\theta}$ 是负值，它会以 P' 来描绘出椭圆）。为了方便以後的计算，我们取其颠倒式为椭圆极坐标方程式：

$$\frac{1}{r}=\frac{a-c\cos\theta}{b^2}$$

（三）第二定律的数理分析

以太阳（焦点）为中心，极坐标 (r,θ) 表达行星位置。当 θ 增大到 $\theta+d\theta$ 时，太阳与行星的连线所扫过的面积为 $dA\approx\frac{1}{2}r^2d\theta$，如 [图 4–12] 所示：



[图 4–12]

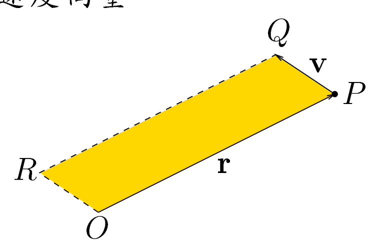
运用第二定律，这个面积的变率为常数，即：

$$\frac{dA}{dt}=\frac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt}=\frac{1}{2}r^2\omega=k,\quad (k：常数，\omega：角速度)$$

$$椭圆面积=\pi ab=\int_0^T dA=\int_0^T k\,dt=kT\quad (T：周期)$$

$$r^2\omega=2k=\frac{2\pi ab}{T}$$

[注]：从物理学观点来看，第二定律是有物理意义的。如 [图 4–13] 所示，$\mathbf{r}$ 是位置向量，$\mathbf{v}$ 是速度向量：



[图 4–13]

$|\mathbf{r}\times\mathbf{v}|$ 是平行四边形 $\square OPQR$ 的面积。但 $\mathbf{r}\times m\mathbf{v}$ 是物体相对于 O 点的角动量，而且因为是平面运动，此向量是恒垂直于平面的，所以由第二定律亦可推出角动量是不变的（这也是人类理性文明中首次接触到角动量守恒定律）。再者，

$$
\begin{aligned}
\mathbf{0} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r}\times m\mathbf{v}) &= \mathbf{v}\times m\mathbf{v} + \mathbf{r}\times m\mathbf{a} \\
&= \mathbf{r}\times\mathbf{F}
\end{aligned}
$$

所以引力 $\mathbf{F}$ 的作用方向是和 $\mathbf{r}$ 反向平行，亦即是向心的。

（四）向心加速的公式：$-(-r\omega^2+\dfrac{d^2r}{dt^2})$

上述公式只需对极坐标 $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$ 直接微分便可得出。计算过程大致如下：

$$
\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} \dot{x} = \dot{r}\cos\theta - r\omega\sin\theta \\ \dot{y} = \dot{r}\sin\theta + r\omega\cos\theta \end{cases} \quad (\omega = \dot{\theta})
$$

$$
\Rightarrow \begin{cases} \ddot{x} = \ddot{r}\cos\theta - r\omega^2\cos\theta - 2\dot{r}\omega\sin\theta - r\dot{\omega}\sin\theta \\ \ddot{y} = \ddot{r}\sin\theta - r\omega^2\sin\theta + 2\dot{r}\omega\cos\theta + r\dot{\omega}\cos\theta \end{cases}
$$

因此

$$
(\ddot{x},\ddot{y}) = (\ddot{r}-r\omega^2)(\cos\theta,\sin\theta) + (2\dot{r}\omega + r\dot{\omega})(-\sin\theta,\cos\theta)
$$

由（三）知引力的方向是和位置方向 $(\cos\theta,\sin\theta)$ 相反，所以 $(2\dot{r}\omega+r\dot{\omega})$ 应该是 0，并只馀下向心加速 $-(-r\omega^2+\ddot{r})$。

（五）平方反比定律的证明（第一、第二定律的综合分析）

要证明引力是满足平方反比定律，我们只需验证 $r^2\left(\dfrac{d^2r}{dt^2}-r\omega^2\right)$ 是否为一常数。先对椭圆的极坐标方程式微分：

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{r} &= \frac{a-c\cos\theta}{b^2} \\
-\frac{1}{r^2}\frac{dr}{dt} &= \frac{c}{b^2}\sin\theta\,\omega \\
\Rightarrow \quad \frac{dr}{dt} &= -\frac{c}{b^2}\sin\theta\, r^2\omega = -\frac{2\pi ac}{bT}\sin\theta
\end{aligned}
$$

在上式用了（三）$r^2\omega = \dfrac{2\pi ab}{T}$。同样地在下面的计算中，我们尽可能分离出 $r^2\omega$ 这一项，然後换成常数 $\dfrac{2\pi ab}{T}$。

$$\begin{aligned}
\frac{d^2r}{dt^2} &= -\frac{2\pi ac}{bT}\cos\theta\,\omega \\
\Rightarrow \quad r^2\frac{d^2r}{dt^2} &= -\frac{2\pi ac}{bT}\cdot\frac{2\pi ab}{T}\cos\theta \\
&= \frac{-4\pi^2a^2}{T^2}c\cos\theta \\
r^2(-r\omega^2) &= -r^3\omega^2 = -\frac{1}{r}(r^2\omega)^2 = -\frac{1}{r}\frac{4\pi^2a^2b^2}{T^2} \\
&= -\frac{4\pi^2a^3}{T^2} + \frac{4\pi^2a^2}{T^2}c\cos\theta
\end{aligned}$$

因此 $r^2\left[-r\omega^2 + \dfrac{d^2r}{dt^2}\right] = -\dfrac{4\pi^2a^3}{T^2}$（常数）。

（六）<u>由行星引力到万有引力</u> (Newton’s Formula)

在这一步，匀均密度的球面对于球外质点的引力公式乃是关键之所在。请参看第二章之末之证明。

这也就是由 Kepler 行星运行定律的数理分析自然而然地推导出牛顿万有引力定律的一个简朴详尽的叙述。它就是牛顿的科学巨著 Philosophiae Naturalis Principia Mathematica 中所讨论的主要结果。它也自然是後学後进应当心领神会，并从此体会人类理性文明世代相承，继往开来的精要和精神。

4.2.6 三角函数的积分计算

由 $(\sin x)' = \cos x$ 和 $(\cos x)' = -\sin x$ 这两个基本的结果，我们可以运用微积分基本定理反过来计算 $\sin x$ 和 $\cos x$ 的积分，亦即

$$\int_a^x \sin t\,dt = \cos a - \cos x, \quad \int_a^x \cos t\,dt = \sin x - \sin a$$

再配合正弦、馀弦的半角、和化积等公式，我们还可以计算一些较为复杂的积分。

【例一】：$\int_a^x \sin^2 t\,dt = ?$

$$\int_a^x \sin^2 t\,dt = \int_a^x \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2t\right) dt = \frac{x-a}{2} - \frac{\sin 2x - \sin 2a}{4}$$

【例二】：$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx\,dx = ?$

因为 $\sin mx \cos nx = \frac{1}{2}(\sin(m+n)x - \sin(m-n)x)$，所以当 $m \neq n$ 时

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx\,dx &= \frac{1}{2(m+n)}\{\cos(m+n)(-\pi) - \cos(m+n)\pi\} \\ &\quad - \frac{1}{2(m-n)}\{\cos(m-n)(-\pi) - \cos(m-n)\pi\} = 0\end{aligned}$$

而当 $m = n$ 时，$\sin mx \cos nx = \frac{1}{2}\sin 2mx$，所以

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx\,dx = \frac{1}{4m}\{\cos 2m(-\pi) - \cos 2m\pi\} = 0$$

亦即在任何情况之下 $\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx\,dx = 0$。

4.2.7 反三角函数及 π 的近似值计算

由反函数的微分公式

$$\frac{dx}{dy} = 1 \bigg/ \frac{dy}{dx}$$

我们可以求出反三角函数的导函数如下：

【例三】：$\frac{d}{dx}\sin^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $\frac{d}{dx}\cos^{-1} x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

令 $y = \sin^{-1} x$，则 $x = \sin y$。对 y 求导後即得

$$\frac{dx}{dy} = \cos y$$

亦即

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

同理 $\frac{d}{dx}\cos^{-1}x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$。

【例四】：$\frac{d}{dx}\tan^{-1}x = \frac{1}{1+x^2}$

令 $y=\tan^{-1}x$，则 $x=\tan y$。对 y 求导後即得 $\frac{dx}{dy}=\sec^2 y = 1+\tan^2 y$，亦即

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{1+x^2}$$

在上述 $\tan^{-1}x$ 的导函数表达式中，$\frac{1}{1+x^2}$ 有下述几何级数展开式：

$$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+\ldots+(-1)^{n-1}x^{2(n-1)}+\frac{(-1)^n x^{2n}}{1+x^2}$$

运用微积分基本定理，可得

$$\tan^{-1}x=\int_0^x \frac{dt}{1+t^2}=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\ldots+ (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+\int_0^x \frac{(-1)^n t^{2n}}{1+t^2}dt$$

当 $|x|\le 1$ 时：

$$\left|\int_0^x \frac{t^{2n}}{1+t^2}dt\right| \le \left|\int_0^x t^{2n}dt\right| = \frac{|x|^{2n+1}}{2n+1}$$

这个馀项会随著 n 的增大而趋于 0，因此得出：

$$\tan^{-1}x=\int_0^x \frac{dt}{1+t^2}=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}\pm\ldots \qquad -1\le x\le 1$$

这就是 James Gregory 在 1671 年时已得到的 $\tan^{-1}x$ 的幂级数展开式。当 $x=1$ 时，左方的 $\tan^{-1}1=\frac{\pi}{4}$，所以：

$$\frac{\pi}{4}=\tan^{-1}1=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\pm\ldots$$

上述级数提供了一个计算 π 的方法。可惜这个级数的收敛速度实在是太慢了，即使计算了 1,000,000 项，还不能准确至小数点後第七位；但

如果我们能够选取一些较小的 x 代入 $\tan^{-1}x$ 的级数之中，则可以大大提高收敛速度。这也就是 John Machin 在 1706 年提出的公式，而他自己也运用下述公式把 π 计算至 100 个小数位：

$$\frac{\pi}{4} = 4\tan^{-1}\frac{1}{5} - \tan^{-1}\frac{1}{239}$$

<u>转换方法</u>：基于 $\tan x$ 的和角公式：

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

令 $\alpha = \tan^{-1}A, \beta = \tan^{-1}B$，则上述和角公式可改写成

$$\alpha+\beta = \tan^{-1}A + \tan^{-1}B = \tan^{-1}\left(\frac{A+B}{1-AB}\right)$$

所以，若我们可以用较小的 A, B 把 1 重写成 $\frac{A+B}{1-AB}$，则因为 $\tan^{-1}A$ 和 $\tan^{-1}B$ 的收敛速度比较快，这样便可以大为改善 $\tan^{-1}1$ 的收敛速度。例如：取 $A=\frac{1}{2}$，则

$$1 = \frac{\frac{1}{2}+B}{1-\frac{1}{2}B} \Rightarrow B = \frac{1}{3}$$

亦即 $\tan^{-1}1 = \tan^{-1}\frac{1}{2} + \tan^{-1}\frac{1}{3}$。当然，我们还可以把 $\tan^{-1}\frac{1}{2}$ 和 $\tan^{-1}\frac{1}{3}$ 继续分解下去，便可以进一步提高收敛速度：

$$\begin{aligned}\tan^{-1}\frac{1}{2} &= \tan^{-1}\frac{1}{3} + \tan^{-1}\frac{1}{7} \\ \tan^{-1}\frac{1}{3} &= \tan^{-1}\frac{1}{7} + \tan^{-1}\frac{2}{11} \quad \text{等等}\end{aligned}$$

现在让我们尝试用 Machin 的公式，把 π 计算至小数点後 15 个位。首先我们要决定所需要计算的项数。

若所要求的近似值要准确到小数点後第 15 个位，则需要馀项的总和小于 5×10^{-16}，即

$$\text{馀项总和} \lesssim \sum_{k=n+1}^{\infty}\left(\frac{16(\frac{1}{5})^{2k-1}}{2k-1}\right) < 5\times10^{-16}$$

由此得出 n 的粗略估计为 $n \geq 11$，即需要计算 11 项。计算过程大致如下：

$$\tan^{-1}\frac{1}{5} \approx \frac{1}{5} - \frac{(\frac{1}{5})^3}{3} \pm \ldots + \frac{(\frac{1}{5})^{21}}{21} = 0.19739555984988076189$$
$$\tan^{-1}\frac{1}{239} \approx \frac{1}{239} - \frac{(\frac{1}{239})^3}{3} \pm \ldots + \frac{(\frac{1}{239})^{21}}{21} = 0.0041840760020747238645$$

由此便可得出 π 的近似值

$$\pi = 16\tan^{-1}\frac{1}{5} - 4\tan^{-1}\frac{1}{239} \approx 3.1415926535897932947$$

这个近似值和 π 的实际数值相比

$$\pi = 3.14159265358979323846\ldots$$

其精确度已到达第 16 个位了。

[注] 在往後约二百多年时间，人们都是采用 Machin 公式或类似的公式来计算 π 的高度精确值。而其中最为注目的就是 William Shanks 在 1853 年发表的 "Rectification of the circle"，他把 π 计算至 607 个小数位。其实 Shanks 是计算了 707 个位的，但是他只发表前 607 个值。可惜他在计算过程中出错，使得第 527 位是错的。不过这个错误要到了 1945 年才被发现出来。

【习题】：

(1) 计算 $\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \, dx$。

(2) 计算 $\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx \, dx$。

(3) 试证明 Machin 公式。

(4) 试用 $\frac{\pi}{4} = 2\tan^{-1}\frac{1}{3} + \tan^{-1}\frac{1}{7}$ 来计算 π 的 12 个小数位的近似值。

4.3 常系数常微分方程

在解各种各样代数问题时，我们经常要用到或归于代数方程之求解。相类似的，在各种各样的数理分析，理解自然之中，也经常要用到或归于解微分方程。而在各种各样微分方程之中，最为简单而且好用者，莫过于常系数常微分方程。这也就是本节所要研讨的课题。

4.3.1 算子符号

本节将以 x 表示自变数，y 表示待求的函数，D 表示微分运算 $\frac{d}{dx}$，亦即

$$Df(x) = f'(x),\ D^2f(x) = f''(x),\ \ldots, D^kf(x) = f^{(k)}(x) \tag{4.25}$$

再者，我们将用 $p(D)$ 表示一个以算子 D 为「不定元」的多项式，即

$$p(D) = c_0D^n + c_1D^{n-1} + \ldots + c_kD^{n-k} + \ldots + c_n \tag{4.26}$$

其中 $c_i \in \mathbb{C}$。把 $p(D)$ 想成由所有无穷阶连续可微实变（复值）函数所组成的线性空间 $\mathcal{V}$ 上的算子，亦即

$$\begin{aligned} p(D)f(x) = c_0D^nf(x) + c_1D^{n-1}f(x) + \ldots \\ + c_kD^{n-k}f(x) + \ldots + c_nf(x) \end{aligned} \tag{4.27}$$

显然有

$$p(D)(k_1f_1(x) + k_2f_2(x)) = k_1p(D)f_1(x) + k_2p(D)f_2(x) \tag{4.28}$$

所以 $p(D)$ 乃是一个线性算子。再者，设 $p(D)$ 和 $q(D)$ 是两个这样的线性算子，$p(D)\cdot q(D)$ 是将它们用 D 的多项式乘法所得的算子，则容易验证

$$(p(D)\cdot q(D))f(x) = p(D)(q(D)f(x)) \tag{4.29}$$

对于任给 $f(x) \in \mathcal{V}$ 皆成立，亦即线性算子 $p(D)$ 和 $q(D)$ 的组合就是 $p(D)\cdot q(D)$。其实，(4.29)–式所表达者——算子组合和多项式乘法之间的

「同构」关系——乃是引进算子符号的原由和优点所在。它使得我们可以有效地运用多项式的代数知识来达成微分方程

$$p(D)y = 0 \tag{4.30}$$

的求解。

采用研讨线性空间和线性算子的通用符号，我们将用 $\operatorname{Ker}(p(D))$ 表示 $\mathcal{V}$ 中所有满足

$$p(D)f(x) \equiv 0, \quad f(x) \in \mathcal{V} \tag{4.31}$$

所成的子集，亦即微分方程 (4.30) 的解函数的集合。由 $p(D)$ 的线性（亦即 (4.28)–式）可见 $\operatorname{Ker}(p(D))$ 乃是 $\mathcal{V}$ 中的一个线性子空间，亦即

$$f_1(x), f_2(x) \in \operatorname{Ker}(p(D)) \;\Rightarrow\; k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x) \in \operatorname{Ker}(p(D)) \tag{4.32}$$

4.3.2 $p(D) = (D-\lambda)^k$ 的情形，$\lambda \in \mathbb{C}$

让我们先来研讨两个简单的特殊情形，即其一是 $\lambda = 0$ 者，其二是 $k = 1$ 者。

【例一】：$f(x) \in \operatorname{Ker}(D^k)$ 的充要条件是：$f(x)$ 乃是一个次数至多为 $k-1$ 的多项式函数。

<u>证明</u>：设 $f(x)$ 是一个次数至多为 $k-1$ 的多项式函数，则显然有 $D^k f(x) = f^{(k)}(x) \equiv 0$。反之，设 $f^{(k)}(x) \equiv 0$，则泰勒公式中的 $R_k \equiv 0$，亦即

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \ldots + \frac{f^{(k-1)}(0)}{(k-1)!}x^{k-1} + R_k \tag{4.33}$$

而 $R_k \equiv 0$，所以 $f(x)$ 乃是一个次数至多为 $k-1$ 的多项式函数。 □

【例二】：设 $\lambda = k + i\omega \neq 0$。则 $\operatorname{Ker}(D-\lambda)$ 乃是由 $e^{kx}(\cos\omega x + i\sin\omega x)$ 的常数倍所组成的一维子空间。

<u>证明</u>：设 $f(x) \in \operatorname{Ker}(D-\lambda)$ 是一个满足

$$Df(x) = \lambda f(x) \tag{4.34}$$

的非零函数。令

$$g(x) = e^{-kx}(\cos\omega x - i\sin\omega x)f(x) \tag{4.35}$$

则有

$$\begin{aligned} Dg(x) &= (-\lambda)\cdot e^{-kx}(\cos\omega x - i\sin\omega x)f(x) \\ &\quad + e^{-kx}(\cos\omega x - i\sin\omega x)\cdot\lambda f(x) \equiv 0 \end{aligned} \tag{4.36}$$

亦即 $g(x)$ 乃是一个复值常数。所以 $f(x)$ 乃是 $e^{kx}(\cos\omega x + i\sin\omega x)$ 的复常数倍是也。 □

【定理 4.3】：$f(x) \in \mathrm{Ker}\,(D-\lambda)^k$ 的充要条件是

$$f(x) = e^{kx}(\cos\omega x + i\sin\omega x)(c_0 + c_1 x + \ldots + c_{k-1}x^{k-1}) \tag{4.37}$$

其中 c_i 是复常数。

证明：一如[例二]令

$$g(x) = e^{-kx}(\cos\omega x - i\sin\omega x)f(x) \tag{4.35}$$

则有

$$\begin{aligned} Dg(x) &= (-\lambda)e^{-kx}(\cos\omega x - i\sin\omega x)f(x) \\ &\quad + e^{-kx}(\cos\omega x - i\sin\omega x)Df(x) \\ &= e^{-kx}(\cos\omega x - i\sin\omega x)(D-\lambda)f(x) \end{aligned} \tag{4.38}$$

如此逐步计算，即得：

$$D^k g(x) = e^{-kx}(\cos\omega x - i\sin\omega x)(D-\lambda)^k f(x) \equiv 0 \tag{4.39}$$

由[例一]即得 $g(x)$ 乃是一个次数至多为 $(k-1)$ 的多项式函数，亦即

$$f(x) = e^{kx}(\cos\omega x + i\sin\omega x)g(x) \tag{4.40}$$

乃是如 (4.37)–式所表达者。 □

4.3.3 $p(D)$ 是一般的情形

在 $p(D)$ 是一般的情形，由代数基本定理可见 $p(D)$ 可以表达成下述形式，即

$$p(D)=\prod_{j=1}^{\ell}(D-\lambda_j)^{\alpha_j} \tag{4.41}$$

其中 $\{\lambda_j=k_j+i\omega_j, 1\le j\le \ell\}$ 是相异的。显然有

$$\operatorname{Ker}(p(D))\supseteq \operatorname{Ker}(D-\lambda_j)^{\alpha_j},\quad 1\le j\le \ell \tag{4.42}$$

所以当然也包含

$$\sum_{j=1}^{\ell} e^{k_jx}(\cos\omega_j x+i\sin\omega_j x)g_j(x) \tag{4.43}$$

其中 $g_j(x)$ 是任给次数至多是 (α_j-1) 的多项式函数。下述[定理 4.4]证明任何 $\operatorname{Ker}(p(D))$ 中的函数都可以唯一地表达成 (4.43)–式所给者。

【定理 4.4】：设 $f(x)\in \operatorname{Ker}(p(D))$, $p(D)$ 如 (4.41)–式所给者，则 $f(x)$ 可以唯一地表达成 (4.43)–式所给者。

用下述引理，则可把上述[定理 4.4]归于[定理 4.3]直接推导之。

【引理】：设 $d(X)$ 和 $m(X)$ 分别是 $p(X)$ 和 $q(X)$ 的最高公因式和最低公倍式，则

$$\operatorname{Ker}(d(D))=\operatorname{Ker}(p(D))\cap \operatorname{Ker}(q(D)) \tag{4.44}$$

$$\operatorname{Ker}(m(D))=\operatorname{Ker}(p(D))+\operatorname{Ker}(q(D)) \tag{4.45}$$

<u>证明</u>：先证 (4.44)–式：显然有

$$\operatorname{Ker}(d(D))\subseteq \operatorname{Ker}(p(D))\cap \operatorname{Ker}(q(D)) \tag{4.46}$$

所以我们只需再证 (4.46)–式的逆向包含式，亦即要由 $p(D)f(x)=0$ 和 $q(D)f(x)=0$ 去推导 $d(D)f(x)=0$。由[定理 1.5]得知存在多项式的表达式

$$d(X)=A(X)\cdot p(X)+B(X)\cdot q(X) \tag{4.47}$$

所以

$$d(D)f(x) = A(D)p(D)f(x) + B(D)q(D)f(x) = 0 + 0 = 0 \tag{4.48}$$

再证 (4.45)–式：显然有

$$\mathrm{Ker}\,(m(D)) \supseteq \mathrm{Ker}\,(p(D)) + \mathrm{Ker}\,(q(D)) \tag{4.49}$$

所以我们只需再证 (4.49)–式的逆向包含式，亦即要由 $m(D)f(x) = 0$ 去求得 $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ 而且 $p(D)f_1(x) = 0, q(D)f_2(x) = 0$ 的分解。由所设

$$p(X) = d(X) \cdot p_1(X), \quad q(X) = d(X) \cdot q_1(X) \tag{4.50}$$

其中 $p_1(X)$ 和 $q_1(X)$ 互素。再者

$$m(X) = q(X)p_1(X) = p(X)q_1(X) \tag{4.51}$$

在此，再用[定理 1.5]和所设 $p_1(X)$ 与 $q_1(X)$ 的最高公因式等于 1，即有

$$1 = A_1(X)p_1(X) + B_1(X)q_1(X) \tag{4.52}$$

所以

$$\begin{aligned} f(x) = 1 \cdot f(x) &= A_1(D)p_1(D)f(x) + B_1(D)q_1(D)f(x) \\ &= f_2(x) + f_1(x) \end{aligned} \tag{4.53}$$

易见

$$\begin{aligned} p(D)f_1(x) &= B_1(D)p(D)q_1(D)f(x) = B_1(D)m(D)f(x) = 0 \\ q(D)f_2(x) &= A_1(D)q(D)p_1(D)f(x) = A_1(D)m(D)f(x) = 0 \end{aligned} \tag{4.54}$$

这也就证明了 $\mathrm{Ker}\,(m(D))$ 中的任给 $f(x)$ 都属于 $\mathrm{Ker}\,(p(D)) + \mathrm{Ker}\,(q(D))$。

□

【推论】：当 $p(D)$ 如 (4.41)–式所给者，则有

$$\mathrm{Ker}\,(p(D)) = \oplus \sum_{j=1}^{\ell} \mathrm{Ker}\,(D - \lambda_j)^{\alpha_j} \tag{4.55}$$

将上述推论和[定理 4.3]结合，即得[定理 4.4]。

4.3.4 $p(D)y = g(x)$ 的解法

若 $f(x)$ 和 $f_1(x)$ 都是 $p(D)y = g(x)$ 的解，则易见

$$p(D)(f(x) - f_1(x)) = p(D)f(x) - p(D)f_1(x) = g(x) - g(x) \equiv 0$$

亦即 $f_0(x) = f(x) - f_1(x)$ 是 $p(D)y = 0$ 的解。所以 $p(D)y = g(x)$ 的通解可以写成下述模样

$$f(x) = f_1(x) + f_0(x), \quad f_0(x) \in \operatorname{Ker} p(D)$$

亦即我们只需要找到一个特殊解 $f_1(x)$ 就可以写下 $p(D)y = g(x)$ 的通解。如果我们可以从某些途径（如解题的实际经验）知道这个特殊解的样子时，当然就可以用待定系数法求之；但一般来说，我们所能辨认的 $g(x)$ 的样子还是十分有限，大多数是 $P(x)e^{kx}$ 的组合。下面我们将会讨论一个有系统的方法来寻找这些特殊解，且以一个简单例子来具体说明其做法。

【例三】：求解 $(D^2+1)f(x) = \tan x,\ 0 < x < \frac{\pi}{2}$。

解：易见 $(D^2+1)f_0(x) = 0$ 的通解为

$$f_0(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x, \quad c_1, c_2 \text{ 为常数}$$

而寻找 $f_1(x)$ 的方法是把上述 $f_0(x)$ 的通解中那些常数 c_1 和 c_2 当作为待定函数，并设法寻找适当的 $c_1(x)$ 和 $c_2(x)$ 来构造出 $g(x)$。令

$$f_1(x) = c_1(x)\cos x + c_2(x)\sin x$$

我们需要有 2 个条件式才可以唯一地确定 $c_1(x)$ 和 $c_2(x)$。当然，$f_1(x)$ 首先要满足 $(D^2+1)f(x) = g(x)$，所以我们还需要额外一个条件式。这个条件式自然要选得愈便于计算愈好，若把它选得适当使我们不用考虑 $c_1(x), c_2(x)$ 的高阶微分者当然就是最好的！先对 $f_1(x)$ 微分：

$$f_1'(x) = c_1'(x)\cos x - c_1(x)\sin x + c_2'(x)\sin x + c_2(x)\cos x$$

由此可见，我们应该令 $c_1'(x)\cos x + c_2'(x)\sin x = 0$，使得 $f_1'(x) = -c_1(x)\sin x + c_2(x)\cos x$。继续对 $f_1'(x)$ 微分，得

$$\begin{aligned} f_1''(x) &= -c_1'(x)\sin x - c_1(x)\cos x + c_2'(x)\cos x - c_2(x)\sin x \\ &= -c_1'\sin x + c_2'\cos x - f_1(x) \\ \Rightarrow f_1''(x) + f_1(x) &= -c_1'(x)\sin x - c_2'(x)\cos x = \tan x \end{aligned}$$

所以，$c_1(x)$ 和 $c_2(x)$ 是会满下述联立一阶微分方程：

$$\begin{cases} c_1'(x)\cos x + c_2'(x)\sin x = 0 \\ -c_1'(x)\sin x + c_2'(x)\cos x = \tan x \end{cases}$$

易见其解为 $c_1'(x) = -\sin x\tan x = \cos x - \sec x$, $c_2'(x) = \sin x$，亦即 $c_1(x) = \sin x - \ln(\sec x + \tan x)$, $c_2(x) = -\cos x$。所以，我们找到一个特殊解

$$f_1(x) = -\cos x\ln(\sec x + \tan x)$$

而 $(D^2+1)f(x) = \tan x$ 的通解为

$$f(x) = c_1\cos x + c_2\sin x - \cos x\ln(\sec x + \tan x)$$

易见上述方法可推广到处理一般的常系数常微分方程 $p(D)y = g(x)$，其解法我们称之为「参数变分法」(method of variation of parameters)。

第五章

欧氏几何、球面几何和非欧几何的统一理论

自古到今，人类理性文明世代相承、精益求精地对于我们和万物万象共存于其中的「空间」的本质的研究，总称之为几何学 (Geometry)。由此可见，几何学也就是空间本质的认识论。因此，几何学理所当然地是各种各样自然科学的基础所在，自然而然地是整个自然科学的先行者和科学方法论的发祥地与典范。在人类理性文明的发展史上，几何学在古希腊时代获得长足的进展，其辉煌的成就有赖于 Euclid 所著的几何原理 (Elements) 集其大成，流传後世，所以现在通常把它称之谓欧氏几何学 (Euclidean Geometry)。

Euclid 的 Elements 对于当代研讨所得的几何认知，采用「公理化」(axiomatic) 的论述方式。[其实，公理化的论述方式并非 Euclid 所首创，Euclid 的体系大概可以追溯到 Eudoxus 的论著；可惜 Eudoxus 的原著早已失传，我们已无缘得见其原貌了。] 概括地说，公理化的论述方式乃是选定一组简朴而且基本的性质作为起点，有系统地逐步推演所要研讨的事物（例如几何学所要研讨的空间）的其他各种各样有用、常用的性质。当年把所选用的基础性质（起点）叫做公理，把那些由公理演绎推导而得者叫做定理。对于欧氏几何学的公理体系和公理化治学的要点，在 1899 年 Hilbert 所著的几何基础论 (Grundlagen der Geometrie) 中有详尽的讨论，可供有意深究者参阅。大体上来说，公理化的方法论也就是用逻辑推理 (logical deduction) 来对于某一种知识体系构造一

种性质层面上的以简御繁。

长话短说，我们所在的空间的各种各样本质之中，最为简朴基本者可以归为下述四种，即

1. 点、线、面的连结与分隔（基本结构）；
2. 连续性：直线的连续不断 $\longleftrightarrow$ 实数系的连续性；
3. 对称性：空间对于平面的反射对称性 $\longleftrightarrow$ 叠合公理 (S.A.S.) 等；
4. 平直性：平行公理 $\longleftrightarrow$ 三角形内角和恒等于一平角。

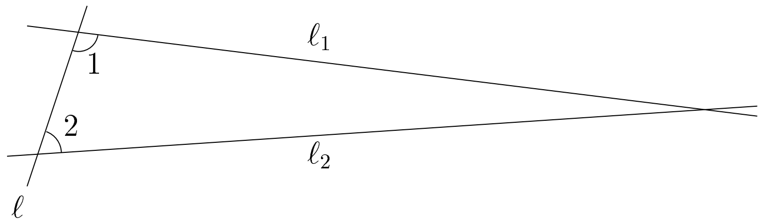
从几何直观来看，前三者的直观内涵都十分明确、自然，唯独平直性的直观内涵令人难以理解其精要何在？此事一直到十九世纪初才真相大白，这也就是为什麼从古希腊到十八世纪末，二千多年来很多几何学家都对于平行公理感到不自在，因而都想（用其他公理来）证之而後快的原由。一直到十九世纪初 (Bolyai, Lobachevsky, Gauss) 非欧几何学的发现才一方面知道平行公理是不能用其他公理来加以论证的，而另一方面也搞清楚平行公理的直观内涵乃是空间的「本质性曲率」等于零（亦即平直性）。

本章将以微积分为工具，对于欧氏、球面与非欧这三种几何，建立其求同存异的统一理论，作为本书所研讨的基础分析学的一个重要应用之范例。

5.1 非欧几何的发现过程及其历史意义

在欧氏所著的 Elements 中所论述的几何学公理体系之中，其第五公设也就是我们通常称之为平行公理者，即平面上任给两条直线 ℓ_1, ℓ_2，若其为另一直线 ℓ 交截的同傍内角之和少于平角，则 ℓ_1, ℓ_2 必定相交于 ℓ 的该侧，亦即如 [图 5–1] 所示：

$$\angle 1 + \angle 2 < \text{平角} \quad \Rightarrow \quad \ell_1, \ell_2 \text{ 相交于 } \angle 1, \angle 2 \text{ 之同侧}$$



[图 5–1]

若我们对于整个欧氏几何学的逻辑体系再作一次详细的分析，就会发现上述第五公设在所有定量几何的基本定理（如三角形内角和定理、面积公式、相似三角形定理、毕氏定理等等）的论证之中都扮演著基本重要的角色。但是这个第五公设所反映的空间本质的直观内含究竟是什麼呢？却又是一直困扰著古希腊到十九世纪初非欧几何学的发现之前世世代代的几何学家的老大疑问。他们对于上述几何基础论上的疑难的研究大致上可以分成三个阶段：

【第一阶段】：试著改用其他几何命题来替代第五公设，例如当然可以用三角形内角和恒等于平角来替换平行公理。但是这种尝试并不成功，因为他们用来替代的几何命题的直观内含依然难以捉摸。

【第二阶段】：试著用欧氏公理体系中其他的公理去证明第五公设。假若真的能够达成这样一个证明的话，则第五公设就可以根本从公理体系中省却！岂不使得整个几何公理体系更加简洁明了？但是此事两千多年来，世世代代的几何学家们，屡试皆败，事与愿违。

【第三阶段】：从世世代代试证第五公设的教训中，促使十八、十九世纪的某些几何学家们去探索另一种几何体系的可能性，亦即是否存在著另一种满足唯独在第五公设上和欧氏体系相异的几何体系？假如存在的话，一方面使我们充分理解为什麼试证平行公理屡试必败！而另一方面也可从欧氏几何和这种大同小异的「非欧几何」的本质的异同比较之中，真正认识到第五公设的直观内涵究竟是什麼！在这方面的探讨终于在十九世纪初获得了突破性的成功，这就是当年 Bolyai, Lobachevsky 和 Gauss 在非欧几何学的发现与建立上的重大成就。

长话短说，如今我们已经知道这种和欧氏几何大同小异（亦即仅仅在三角形内角和上与欧氏几何相异而在其他各方面完全和欧氏几何相同）的非欧几何体系是存在的。现在我们再来回顾这一段历史性的进

展，似乎宜于下述两点著手研讨之，即

（一） 导致非欧几何学之发现的思路和重要的突破点是那些？

（二） 欧氏几何、球面几何和非欧几何乃是三种大同小异的几何体系，其大同在于它们都具有同样的连续性和对称性，而其小异则在于它们的三角形内角和分别是等于、大于和小于一个平角。是否可以求大同存小异，建立起一种统一这三种几何学的理论呢？

这也就是我们要接著详加研讨的中心课题。

5.2 发现非欧几何学的思路与突破点

骤看起来，非欧几何学的发现当然是一种存在性问题，其所要探索者乃是某种数理模型（亦即体系）是否存在的问题。大体上来说，在各种各样的数理模型的研讨之中，存在性问题和唯一性问题乃是两个既相对又相关的基本问题。在这里有一个耐人寻思、富有哲理的想法，那就是存在性的探索往往要先从唯一性的研讨著手。其实，後者经常是达成前者的捷径。这种想法骤听起来难免感到太玄了些，但是稍加分析，就不难初步看出它的合理性。因为要凭空构造出一种具有各种各样基本性质的数理模型有如大海捞针，往往是徒劳无成的。而唯一性方面的研讨正好就是逐步缩小范畴，也就自然而然地把所要构造的事物逐步加以明确。

把上述想法运用到「非欧几何」的探索上，就是要深入研讨那些不依赖于第五公设就能证明的几何定理。例如我们在《基础几何学之一》中所证明的下述定理就是其中一个重要的突破点，即

【定理 5.1】：三角形的内角和不大于一个平角。

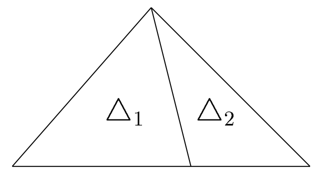
【定理 5.2】：若有一个三角形的内角和等于一个平角，则所有三角形的内角和皆恒等于一个平角。

由此可见，我们所要探索者，乃是那种三角形内角和恒小于一个平角的几何体系。很自然我们可以把平角和一个三角形的内角和的差额定义为该三角形的「角亏」(defect)；当我们把一个三角形分割成两个三角形

，如 [图 5–2] 所示，易见它的角亏乃是两个子三角形的角亏之和，亦即

$$\delta(\triangle) = \delta(\triangle_1) + \delta(\triangle_2)$$

$\triangle$:



[图 5–2]

显然，三角形的面积也有同样的分割可加性，即

$$A(\triangle) = A(\triangle_1) + A(\triangle_2)$$

再者，角亏和面积当然都是叠合不变量，而且它们也具有同样的「包含不等式」，即

$$\triangle \supseteq \triangle' \Rightarrow \begin{cases} A(\triangle) \geq A(\triangle') \\ \delta(\triangle) \geq \delta(\triangle') \end{cases}$$

用上述三点共同的性质就可证得

【定理 5.3】：在一个给定的非欧几何体系中，任给三角形的角亏和面积之间的比值乃是一个本质性的常数，亦即存在一个常数 K 使得

$$\delta(\triangle) = KA(\triangle)$$

对于所有三角形恒成立。

三角形乃是最为简朴的二维几何事物 (2-dimensional geometric object)，三角形的几何性质则自然而然是整个几何学的基础所在。在欧氏几何体系中，三角形的内角和恒等于一个平角和 S.A.S. 叠合条件分别反映着空间的两大基本性质，亦即平直性和对称性。在非欧几何体系中，上述[定理 5.3]乃是前者的变化，而 S.A.S. 的三角形叠合公理则完全同样成立，这也就是非欧几何体系和欧氏几何体系具有完全同样的对称性的另一种表达方式。从定量几何的观点来看，S.A.S. 叠合条件乃是说三角形的六个基本量（三边边长和三角角度）之间，其他三者乃是选定的两边一夹角的函数，而欧氏三角学 (Euclidean Trigonometry) 中的正弦定律和馀弦定律则是把任意三角形的角边之间的函数关系加以

具体明确的定量几何基本定理，它们又是进而用解析法研讨几何的基础工具。可以说欧氏三角学乃是欧氏三角形的解析几何，而它又是整个欧氏解析几何学的基石所在。由此可见对于所要探索的非欧几何体系的唯一性研讨的重大突破点，理当在于其中任意三角形的三边三角之间的函数关系的确定，亦即我们所要进而研讨的要点在于其中任意三角形的「正弦、馀弦定律」。

首先，为了便于讨论，我们可以适当地选定长度的单位使得[定理5.3]中的常数 $K=1$。就好像在研讨球面几何时，半径为 R 的球面上，三角形的角盈和面积之间的关系式乃是

$$\varepsilon(\triangle) = \frac{1}{R^2}A(\triangle)$$

假如我们改用其半径为长度单位，则上述关系式就可以简化为 $\varepsilon(\triangle) = A(\triangle)$。

长话短说，Bolyai, Lobachevsky 和 Gauss 各别在十九世纪初叶所达成的重大突破也就是确立了非欧空间中的正弦、馀弦定律，即

<u>非欧正弦定律</u>：$\dfrac{\sin A}{\sinh a} = \dfrac{\sin B}{\sinh b} = \dfrac{\sin C}{\sinh c}$

<u>非欧馀弦定律</u>：$\begin{cases} \sinh a \sinh b \cos C = \cosh a \cosh b - \cosh c \\ \sinh b \sinh c \cos A = \cosh b \cosh c - \cosh a \\ \sinh c \sinh a \cos B = \cosh c \cosh a - \cosh b \end{cases}$

[注]：双曲正弦、馀弦函数 $\sinh t$ 和 $\cosh t$ 的定义式是

$$\sinh t = \frac{1}{2}(e^t - e^{-t}), \quad \cosh t = \frac{1}{2}(e^t + e^{-t})$$

其命名之原由是 $x = \cosh t, y = \sinh t$ 所表达之曲线乃是双曲线 $x^2 - y^2 = 1$ 之一支。再者，由 §3.4 节的 Euler 公式可见：

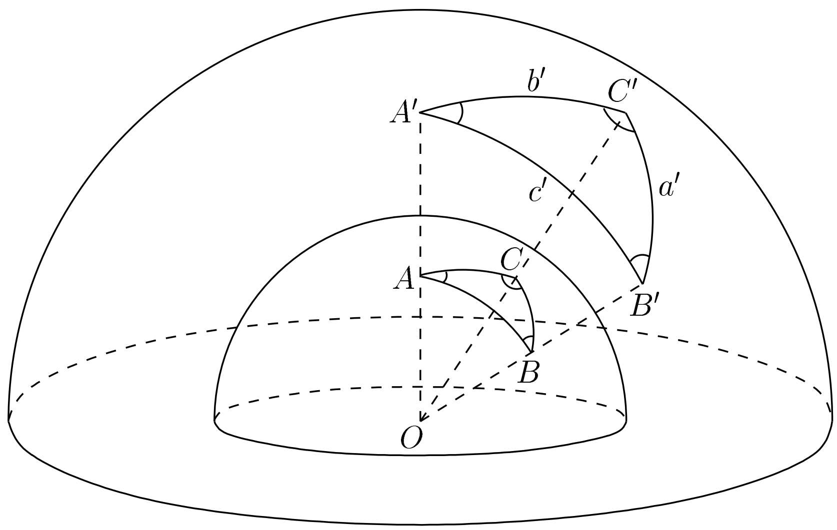
$$\sin(it) = i \sinh t, \quad \cos(it) = \cosh t$$

5.3 欧氏、球面与非欧三角定律的统一理论

欧氏、球面与非欧乃是三种具有同样的连续性和对称性的几何体系，例如其中的三角形都满足 S.A.S. 叠合公理，而在三种几何学中各别的正弦馀弦定律则是三种解析几何的基础所在。假如我们把三种几何的正弦、馀弦定律加以比较分析，就会看到三者的正弦定律在形式上十分相似，即

$$\text{欧氏正弦定律}: \frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$
$$\text{球面正弦定律}: \frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c}$$
$$\text{非欧正弦定律}: \frac{\sin A}{\sinh a} = \frac{\sin B}{\sinh b} = \frac{\sin C}{\sinh c}$$

但是欧氏馀弦定律和其他两种在形式上则相差甚远，倒是球面和非欧馀弦定律则十分相似。



[图 5–3]

如 [图 5–3] 所示，把单位球放大 R–倍，即得半径为 R 的球面。令 $\widehat{\triangle} ABC$ 和 $\widehat{\triangle} A'B'C'$ 分别是相应的球面三角形，则有 $A' = A$, $B' = B$, $C' = C$, $a' = Ra$, $b' = Rb$, $c' = Rc$。由此可见半径为 R 的球面上的正、

馀弦定律分别是

$$(5.1)\qquad \begin{gathered} \frac{\sin A'}{\sin \frac{a'}{R}} = \frac{\sin B'}{\sin \frac{b'}{R}} = \frac{\sin C'}{\sin \frac{c'}{R}} \\ \sin\frac{a'}{R}\sin\frac{b'}{R}\cos C' = \cos\frac{c'}{R} - \cos\frac{a'}{R}\cos\frac{b'}{R} \quad \text{等等} \end{gathered}$$

我们可以把上述半径为 R 的球面上的正、馀弦定律略作变化，即改写为

$$(5.1)_R\qquad \begin{gathered} \frac{\sin A'}{R\sin \frac{a'}{R}} = \frac{\sin B'}{R\sin \frac{b'}{R}} = \frac{\sin C'}{R\sin \frac{c'}{R}} \\ R^2\sin\frac{a'}{R}\sin\frac{b'}{R}\cos C' = R^2\big(\cos\frac{c'}{R} - \cos\frac{a'}{R}\cos\frac{b'}{R}\big) \quad \text{等等} \end{gathered}$$

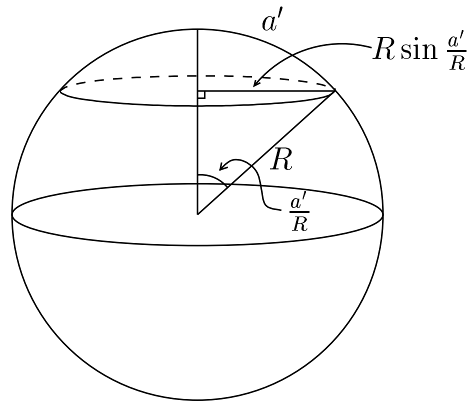
从几何的观点，很自然地可以把欧氏平面想成是球面无限放大的局部形式。因此，欧氏正、馀弦定律应该可以表达成 R–球面上的正、馀弦定律在 $R\to\infty$ 的极限形式。用上述改写後的形式就很容易看到这一点，即有

$$(5.2)\qquad \begin{aligned} &\lim_{R\to\infty} R\sin\frac{a'}{R} = a'\lim_{\frac{a'}{R}\to 0}\frac{\sin\frac{a'}{R}}{\frac{a'}{R}} = a'\cdot 1 = a'\,, \\ &\lim_{R\to\infty} R^2\big(1-\cos\frac{c'}{R}\big) = c'^2\lim_{\frac{c'}{R}\to 0}\frac{1-\cos\frac{c'}{R}}{(\frac{c'}{R})^2} = \frac{1}{2}c'^2\,, \\ &\lim_{R\to\infty} R^2\big(1-\cos\frac{a'}{R}\cos\frac{b'}{R}\big) = \frac{1}{2}(a'^2+b'^2)\,. \end{aligned}$$

所以 $(5.1)_R$–式在 $R\to\infty$ 的极限形式就是

$$(5.1)_\infty\qquad \begin{gathered} \frac{\sin A'}{a'} = \frac{\sin B'}{b'} = \frac{\sin C'}{c'} \\ a'b'\cos C' = \frac{1}{2}\big(a'^2+b'^2-c'^2\big)\,, \quad \text{等等} \end{gathered}$$

这也就是欧氏正、馀弦定律。其实，在 R–球面正弦定律中所出现的函数 $R\sin\dfrac{a'}{R}$ 还有其自然的几何意义，即如 [图 5–4] 所示



[图 5–4]

R–球面上一个半径为 a' 的圆周周长等于 $2\pi R\sin\dfrac{a'}{R}$。由此可见，R–球面的正弦定律还可以进一步改写成下述富有几何意义的形式，即

$$\frac{\sin A}{\odot a}=\frac{\sin B}{\odot b}=\frac{\sin C}{\odot c} \tag{5.3}$$

其中 $\odot r$ 表示半径为 r 的圆周周长。

相信当年（1825 年前後）Bolyai 很可能就是从类似的分析而想到在非欧空间的正弦定律也应该是上述形式，而且他当时业已研讨得非欧空间中半径为 r 的圆周周长公式乃是

$$\odot r=\frac{2\pi}{\sqrt{K}}\sinh\sqrt{K}r \tag{5.4}$$

其中本质性常数 K 就是 $\delta(\triangle):A(\triangle)$ 的那个比值常数。

[注]：角亏 $\delta(\triangle)$ 乃是负的角盈 $\varepsilon(\triangle)$。在 R–球面上，三角形的面积公式可写成

$$\varepsilon(\triangle)=\frac{1}{R^2}A(\triangle)$$

亦即
$$\varepsilon(\triangle)=KA(\triangle),\quad K=\frac{1}{R^2}$$

而 R–球面中的 $\odot r$ 函数则可以改写成

$$\odot r=\frac{2\pi}{\sqrt{K}}\sin\sqrt{K}r$$

再者，在非欧空间的面积公式则是

$$\varepsilon(\triangle) = -\delta(\triangle) = -KA(\triangle)$$

而上述圆周周长公式 (5.4) 则可以改写成

$$\odot r = \frac{2\pi}{\sqrt{-K}} \sin\sqrt{-K}r \quad \left(= \frac{2\pi}{i\sqrt{K}}\big(i\sinh\sqrt{K}r\big)\right) \tag{5.4'}$$

总结上面的分析所得，对于欧氏、球面和非欧几何的本质有下述统一全局的几个要点：

（一）三角形内角和与面积之间的关联：

$$\varepsilon(\triangle) = A + B + C - \pi = KA(\triangle)$$

其中本质性常数 K 在欧氏空间为零，球面空间为正而非欧空间为负。

（二）圆周周长公式：

$$\odot r = \frac{2\pi}{\sqrt{K}} \sin\sqrt{K}r$$

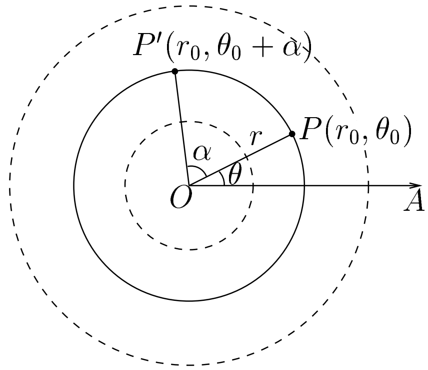
（三）正弦定律：

$$\frac{\sin A}{\odot a} = \frac{\sin B}{\odot b} = \frac{\sin C}{\odot c} \quad \text{(Bolyai)}$$

从几何结构 (geometric structures) 和空间模型 (space forms) 的观点来看，欧氏、球面和非欧这三种空间模型所共有的基本结构就是连结于各点之间的最短通路（亦即欧氏、非欧空间的直线段和球面的大圆圆弧）而它们所共有的基本性质则是它们所具有的反射对称性（亦即 S.A.S. 三角形叠合公理）。对于这样的空间，其中最为简单基本的几何事物 (geometric objects) 首推直线段、三角形和圆，而最为基本重要的几何量 (geometric quantities) 则是直线段的长度，三角形的边长、角度和面积。再者，上述三点当然就是三种几何学中的基本定理的统一形式！由此可见，对于这三种具有最为丰富的对称性的几何的统一理论当然就要从上述三点的统一论证著手研讨之。

首先，让我们对于欧氏和球面的正弦定律的几何内涵再来下一番温故知新的功夫。

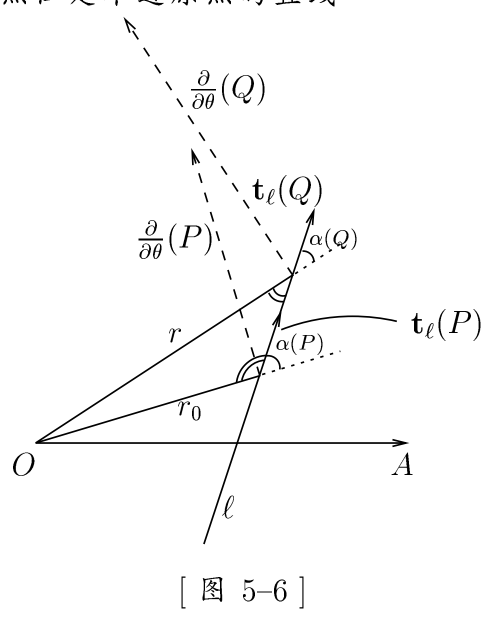
(i) 欧氏平面对于任给一点 O 的旋转对称可以用其上以 O 点为原点的极坐标 (polar coordinate system) 加以简洁描述，如 [图 5–5] 所示。



[图 5–5]

一个绕 O 点 α 角度的旋转把极坐标为 (r_0, θ_0) 的 P 点映射到极坐标为 $(r_0, \theta_0 + \alpha)$ 的 P' 点。再者，在绕 O 点的旋转运动之下，$P(r_0, \theta_0)$ 的轨道就是以原点为圆心的圆，亦即其极坐标方程式就是 $r = r_0$。

(ii) 对于上述极坐标，射线 $\overrightarrow{OP}$ 的方程就是 $\theta = \theta_0$，而一条过原点 O 的直线的方程式则是 $\theta = \theta_0$ 或 $\theta_0 + \pi$。现在让我们再来看一下其他那些不过原点的直线的极坐标方程式应该如何表达？如 [图 5–6] 所示，设 ℓ 是一条过 $P(r_0, \theta_0)$ 点但是不过原点的直线。



[图 5–6]

如 [图 5–6] 所示，设 Q 是 ℓ 上任给一点。令 $\alpha(P), \alpha(Q)$ 分别是 ℓ 和矢径 $\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}$ 之间的夹角。由 $\triangle OPQ$ 的正弦定律，即得

$$\frac{\sin\big(\pi-\alpha(P)\big)}{r}=\frac{\sin\alpha(Q)}{r_0} \tag{5.5}$$

亦即

$$r\sin\alpha(Q)=r_0\sin\big(\pi-\alpha(P)\big)=r_0\sin\alpha(P) \tag{5.5$'$}$$

所以那些不过原点的直线的极坐标方程式乃是

$$r\sin\alpha=\text{常数} \tag{5.6}$$

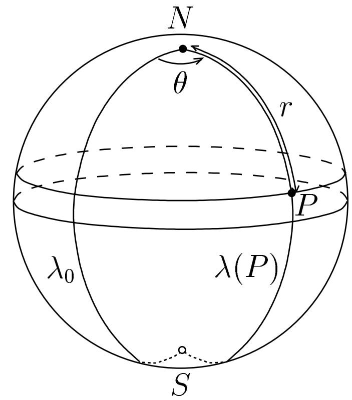
(iii) 设想全平面对于 O 点作单位角速度的旋转运动，则它在每一点 $P(r_0,\theta_0)$ 的速度向量就是那个圆周 $r=r_0$ 在 P 点的切向量，其长度等于半径 r_0（亦即 [图 5–6] 中所示之 $\frac{\partial}{\partial\theta}(P)$，这是往後在多元分析学中通用的符号，它所表达者乃是只有 θ–坐标作单位变率的速度向量）。再者，沿著直线 ℓ 的单位速率的速度向量当然就是直线 ℓ 在该点的单位长切向量，分别以 $\frac{\partial}{\partial\theta}(P)$ 和 $\mathbf{t}_\ell(P)$ 表示上述两种速度向量，则直线方程 (5.6) 的几何意义就是：

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\theta}(P)\cdot\mathbf{t}_\ell(P)&=\left|\frac{\partial}{\partial\theta}(P)\right|\cdot|\mathbf{t}_\ell(P)|\cdot\cos\Big(\frac{\pi}{2}-\alpha\Big)\\&=r\sin\alpha=\text{常数}\end{aligned} \tag{5.7}$$

[注]：若用运动学的观点来说，上述方程式也就是直线等速运动的角动量守恒定律是也。

接著，让我们再用同样的观点来分析球面上的情形如下：

(i) 有鉴于球面的均匀性 (homogeneity)，不妨设给定的原点位于北极 N，则单位球面以北极为原点的极坐标为 [图 5–7] 所示：



[图 5–7]

在球面对于北、南极的旋转运动之下，其轨道乃是「$r =$ 常数」的纬圆，而过北、南极的大圆则是经线。

(ii) 同样的，我们以 $\frac{\partial}{\partial\theta}(P)$ 表示上述单位角速度的旋转运动在 P 点的速度向量，则它就是纬圆在 P 点的切向量，其长度为 $\sin r$。

另一方面由球面正弦定律也可以得出球面上的大圆的极坐标方程式乃是

$$\sin r \sin\alpha = \text{常数} \tag{5.8}$$

而且上述测地线（亦即大圆）方程的几何意义也同样的是

$$\frac{\partial}{\partial\theta}(P)\cdot \mathbf{t}_\ell(P) = \text{常数} \tag{5.9}$$

亦即是球面测地线等速运动的角动量守恒定律。

由上面这样一段「温故」，我们认识到欧氏、球面正弦定律其实就是测地线上等速运动的角动量守恒定律，亦即

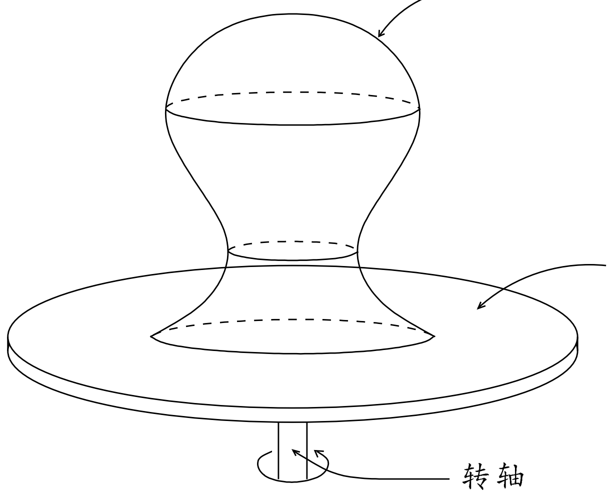
$$\frac{\partial}{\partial\theta}(P)\cdot \mathbf{t}_\ell(P) = \text{常数}$$

由此自然会想到非欧正弦定律也一定就是这种角动量守恒定律，而且三种角动量守恒定律应该具有一种适度的推广加以统一，通常这种更加广泛成立的定律的证明往往会比原先各别论证其特殊情形的证法反而更加简明朴素。这也就是我们在下一节所要研讨的课题。

5.4 旋转面的解析几何

从前面的逐层剖析和一路探讨，使得我们认识到旋转面的解析几何乃是能够把三种几何的三角学统一起来的自然范畴，因此三种几何中的正弦定律应该可以推广成旋转面上的测地线方程的普遍形式而加以统一！

旋转面在人类的历史文明中，在远古的陶器中即已经常出现。在很多博物馆展览的石器时代的出土陶器，经常可以见到造型柔美、旋转对称的陶器。如今以怀古之情，想像远古先民在一个转盘上制作它们的情景；对称性的运用在人类文明中的久远与广泛，令人神往。



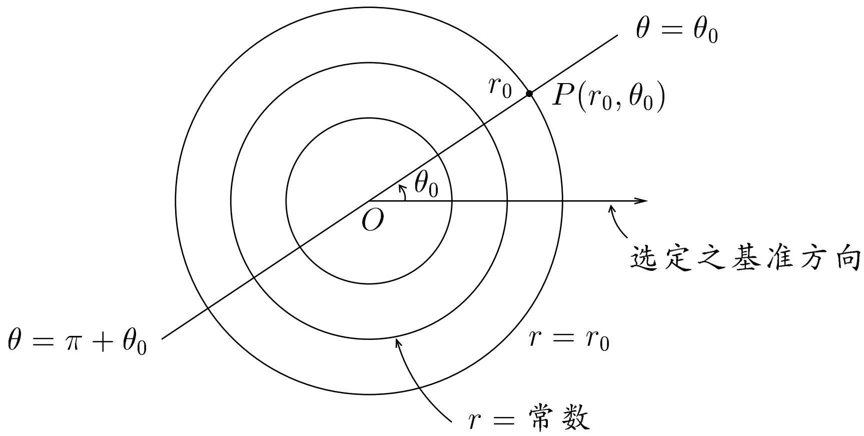
[图 5–8]

<u>旋转面的极坐标表达方式</u>

旋转面乃是那种具有旋转对称性的三维几何模型。例如欧氏平面、球面、[图 5–8] 所示的陶胚面和非欧面等等都是旋转面的例子。我们现在要用解析法去研讨一个旋转面的几何，很自然地应该采用极坐标的表达方式。

设 M 是一个对于基点 O 旋转对称的旋转面。对于其上另外一点 P ，令 r 为 O, P 之间的距离，不妨设 O, P 之间的最短通路（亦即测地线）唯一存在（因为只有在像球面上 O, P 互相对顶的这种特殊情形，

其间最短通路才会不唯一），我们将以符号 $\overline{OP}$ 表达之。再者，令 θ 为 $\overline{OP}$ 和一个选定的基准方向之间的定向夹角，则 (r,θ) 就叫做 P 点的极坐标，如 [图 5–9] 所示。



[图 5–9]

由极坐标的定义，可见「$r=$ 常数」所代表者乃是以基点为圆心的<u>同心圆系</u>，它们也就是 M 在旋转对称的转动之下的轨道 (orbits of the rotation of M around O)。再者，「$\theta=$ 常数」所表达者，则是其他各点到基点的最短通路，例如欧氏平面中的射线和球面上连结南北极的经线。所以那些通过基点 O 的测地线方程也就是 $\theta=\theta_0$ 或 $\theta=\theta_0+\pi$。

对于一个旋转面 M 上的解析几何，所要研讨的一个首要课题就是那些不过基点的测地线应该如何表达？其研讨之所得即为下述[定理 5.4]:

【定理 5.4】：设 M 是一个给定的旋转面，(r,θ) 是其上以基点 O 为原点的极坐标系，则 M 上的测地线方程乃是

$$\odot r\sin\alpha = \text{常数} \tag{5.10}$$

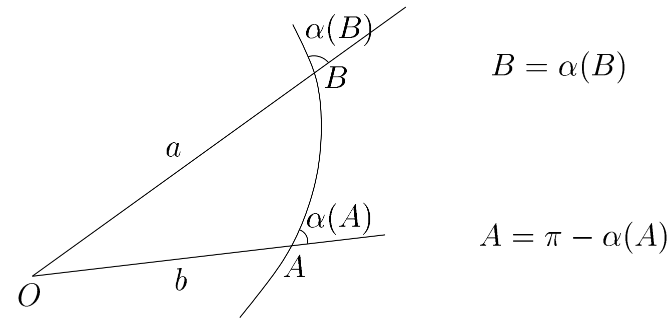
其中 $\odot r_0$ 是 $r=r_0$ 的圆周周长，$\alpha(P)$ 是测地线在 P 点和矢径 $\overrightarrow{OP}$ 的夹角。

上述[定理 5.4]的几何意义有二，其一是它乃是欧氏、球面和非欧这三种几何的正弦定律的共同推广，其二则是旋转面上等速测地运动的角动量守恒定律的普遍成立，即

【推论 1】（<u>广义正弦定律</u>）：设 M 是对于基点 O 旋转对称者，$\triangle OAB$ 是以基点为其顶点之一的三角形，则有

$$\frac{\sin A}{\odot a} = \frac{\sin B}{\odot b} \tag{5.11}$$

其中 a, b 分别是 A, B 的对边边长。
[如 [图 5–10] 所示，它是[定理 5.4]的直接推论。]



$$\odot b \sin A = \odot b \sin \alpha(A) = \odot a \sin \alpha(B) = \odot a \sin B$$

[图 5–10]

【推论 2】（<u>M 上对于旋转的角动量守恒定律</u>）：

$$\frac{\partial}{\partial \theta}(P) \cdot \mathbf{t}_\ell(P) = \frac{1}{2\pi}\odot r \sin \alpha(P) = \text{常数} \tag{5.12}$$

[定理 5.4]还有一个重要的推论，即：

【推论 3】（<u>广义馀弦定律</u>）：令 c 为 $\triangle OAB$ 的第三边边长，亦即 $c = \overline{AB}$，则

$$c = \int_b^a \frac{f(r)dr}{\pm\sqrt{f(r)^2 - (f(b)\sin A)^2}} \tag{5.13}$$

其中 $f(r) = \frac{1}{2\pi}\odot r$，而上述分母的符号在 $\alpha(P) \leq \frac{\pi}{2}$ 时取正号，在 $\frac{\pi}{2} < \alpha(P) < \pi$ 时取负号。
[由[定理 5.4]推导[推论 3]的证明将在证明[定理 5.4]之後再做。]

弧长元素和弧长的第一变分公式：

要研究一个旋转面中的测地线，当然首先得明确其中一条给定曲线（亦即通路）的长度的定义以及它的解析表达式，然後再进而研究连结两个给定点之间的某种曲线族的长度的变化规律。

从解析几何的观点，一条曲线乃是一个动点的轨迹，它的位置（亦即坐标）可以用「时间参数」t 的函数加以解析描述，叫做该曲线的参数表达式。例如，$\{x = a\cos t,\ y = b\sin t;\ 0 \le t \le 2\pi\}$ 乃是椭圆的一种参数表式。再者，一条曲线的长度则可以用积分加以表达。例如欧氏平面上一条以 $\{x = f(t), y = g(t),\ a \le t \le b\}$ 为其笛氏坐标参数表式的曲线，其弧长的解析表式乃是 $\int_a^b [f'(t)^2 + g'(t)^2]^{\frac{1}{2}} dt$。上述弧长积分公式也可以用下述弧长元素的微分公式简洁地加以概括，亦即

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 \tag{5.14}$$

上述微分公式的几何意义就是说曲线的「微段」$\{(x(t), y(t)),\ t_i \le t \le t_{i+1} = t_i + \Delta t\}$ 的弧长和直线段 $\overline{P(t_i)P(t_{i+1})}$ 的长度几乎相等，亦即至多相差一个 Δt 的高阶微量。若用算式表达，即有

$$\Delta_i s^2 \equiv \overline{P(t_i)P(t_i + \Delta t)}^2 = \Delta_i x^2 + \Delta_i y^2 \pmod{\Delta t^3} \tag{5.15}$$

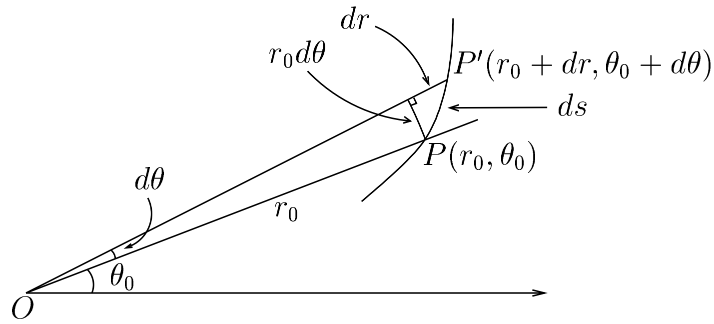
其实这也就是 (5.14)–式的实质内涵，而它也就是勾股定理的微分化形式是也！若改用欧氏平面的极坐标来表达，则有

$$\begin{aligned} &x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta \\ &dx = dr\cos\theta - r\sin\theta d\theta,\ dy = dr\sin\theta + r\cos\theta d\theta \end{aligned} \tag{5.16}$$

代入 (5.14)–式即得

$$ds^2 = (dr\cos\theta - r\sin\theta d\theta)^2 + (dr\sin\theta + r\cos\theta d\theta)^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 \tag{5.14'}$$

这也就是欧氏平面的极坐标弧长元素的微分式。如 [图 5–11] 所示，(5.14′) 其实也是勾股定理的微分化形式。



[图 5–11]

在研讨一般的旋转面的极坐标弧长元素的微分式之前，让我们再来看一看单位球面这个常见而且重要的实例。设 $P(r,\theta)$ 是以北极为基点的球面极坐标，而 $P(x,y,z)$ 则是 P 点的笛氏坐标。如 [图 5–12] 所示，两者之间有下述坐标变换式，即

$$x = \sin r \cos\theta,\ y = \sin r \sin\theta,\ z = \cos r \tag{5.17}$$

将 (5.17′)–式微分即得

$$\begin{cases} dx = \cos r \cos\theta dr - \sin r \sin\theta d\theta \\ dy = \cos r \sin\theta dr + \sin r \cos\theta d\theta \\ dz = -\sin r dr \end{cases} \tag{5.18}$$

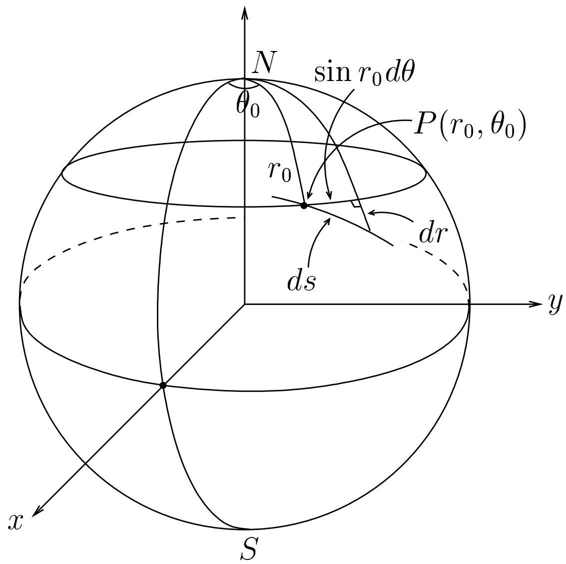
将 (5.18′)–式代入三维笛氏坐标所熟知的弧长元素微分式

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \tag{5.19}$$

即可计算而得下述球面坐标的弧长元素微分式：

$$ds^2 = dr^2 + \sin^2 r d\theta^2 \tag{5.20}$$

如 [图 5–12] 所示，(5.20′)–式也是勾股定理的微分形式。



[图 5–12]

从上面对于曲线弧长的实例分析，我们可以看到下述几点基本认识：

(i) 一条参数曲线的弧长在本质上乃是它的「细分线段」的弧长之总和，所以它乃是一个积分，亦即弧长元素的积分 ($\int ds$)。

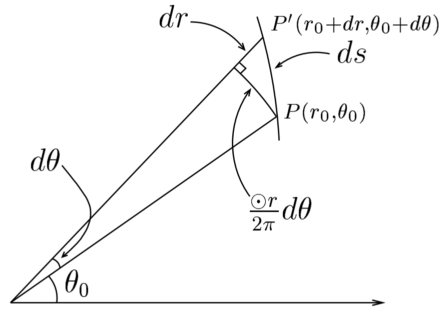
(ii) 弧长元素的几何本质就是那种细分微段的长度的线性（亦即一阶）逼近 (linear approximation)，因为在 $\int ds$ 的积分求和之中，任何比 dt 高阶的微量是完全不影响其积分值者。所以 "ds" 的实质乃是微段弧长的线性（亦即一阶）部分。换言之，也就是微段弧长的线性化 (linearization)。

(iii) 一个曲面 M 在其上一点 P 的切平面 (tangent plane) 就是 M 在 P 点的邻近微片的线性逼近。所以上述切平面上的几何，其实就是 M 在 P 点邻近的几何的局部线性化 (local linearization) 者也；而切平面上的几何乃是欧氏平面的几何，其中的线段长度满足勾股定理，切向量的内积则是表达这种局部线性化所得的切平面几何的基本结构。

将上述对于曲面上曲线弧长概念的剖析所得的三点认识，用到旋转面上就可以得到它对于极坐标的弧长元素微分式，即

$$ds^2 = dr^2 + \left(\frac{\odot r}{2\pi}\right)^2 d\theta^2 \tag{5.21}$$

用 [图 5–13] 来说明，上述公式也就是微小直角三角形的勾股公式微分形式。



[图 5–13]

旋转面及其弧长元素：

总结上面的讨论，一个旋转面 M 在对于基点 O 的旋转运动下的轨道组成以 O 点为圆心的同心圆系，它们的圆周周长乃是描述 M 的几何本质函数 $\odot r$。令 $f(r)=\frac{1}{2\pi}\odot r$，则 M 上的弧长元素可以用极坐标以下述微分式表达之，即

$$ds^2 = dr^2 + f(r)^2 d\theta^2 \tag{5.21$'$}$$

再者，M 在 O 点的局部线性逼近乃欧氏平面，所以 $f(r)$ 在 $r=0$ 的邻近的线性逼近就是 r，亦即 $f(0)=0,\ f'(0)=1$。

反之，上述弧长元素微分式也完全确定了 M 本身的几何结构，所以我们可以反过来，对于任给满足 $f(0)=0$ 和 $f'(0)=1$ 的二阶连续可微函数 $f(r)$，定义一个以 $f(r)$ 为其本质函数的旋转面，$M^2(f)$，它具有极坐标和 (5.21)–式所给的弧长元素微分式。这也就是我们要研讨旋转面的解析几何，自然而且恰如其广的范畴。在 $M^2(f)$ 上的任给一条平滑曲线 Γ，可以用其极坐标参数式 $\{r=\varphi(t),\theta=\psi(t),\ a\le t\le b\}$ 加以描述，而它的长度则可以用下述积分式表达之，即

$$\begin{aligned} L(\Gamma) &= \int ds = \int \left[dr^2 + f(r)^2 d\theta^2\right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \int_a^b \left[\varphi'(t)^2 + f(\varphi(t))^2\psi'(t)^2\right]^{\frac{1}{2}} dt \end{aligned} \tag{5.22}$$

有了上述明确的概念性基础，就可以用微积分的计算去研究 $M^2(f)$ 上的弧长变分，从而证明[定理 5.4]及其[推论 3]。

<u>$M^2(f)$ 上的弧长变分及其第一变分公式</u>：

设 A, B 是 $M^2(f)$ 上的给定两点。连结于 A, B 之间的曲线是非常多种多样的；它们之间变动的自由度是无穷维的。由此可以想到，要用微积分去研究 A, B 两点之间的最短通路是无法像有限元函数的极值问题那样，直截了当地运用微分为零条件式去求解的。为了研究像弧长积分这种定义于无穷维事物（例如连结于 A, B 之间的平滑曲线之总体）的「函数」的极值问题，所发展的学科叫做变分学 (variation theory)，而上述最短通路问题的研讨也就是变分学的发祥地。克服这种由于「变动自由度太大」在极值问题的研讨上所产生的困难的基本想法如下：

尽管连结于 A, B 之间的曲线在总体上有无穷维的变动自由度，但是归根究底，它们都可以想成是各种各样的「单维变动」的组合所构成的总体。由此可以想到，只要能够把「单维变动」的极值条件研究得一清二楚，其实也就足以用来探讨原来的极值问题。这种返璞归真，以简御繁的想法就是变分学的基本想法和出发点。对于我们所要研讨的弧长极值问题的具体做法如下：

<u>曲线之变分和弧长第一变分公式</u>：

$M^2(f)$ 上一条连结 A, B 之间的平滑曲线 Γ 可以用它的一个极坐标参数式表达之，即

$$\Gamma = \left\{\Gamma(t) = \big(\varphi(t), \psi(t)\big),\ a \le t \le b\right\} \tag{5.23}$$

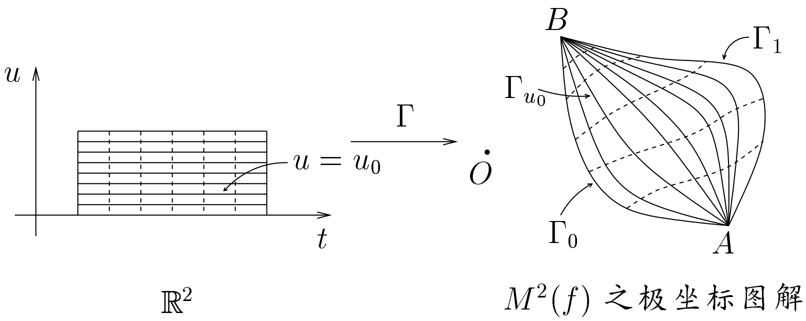
其中 $\varphi(t), \psi(t)$ 是二阶连续可微函数，$A = \big(\varphi(a), \psi(a)\big)$, $B = \big(\varphi(b), \psi(b)\big)$.

设 $\varphi(t,u)$ 和 $\psi(t,u)$ 是一对二阶连续可微的函数，其变域为 $a \le t \le b$, $0 \le u \le 1$ 而且 $\big(\varphi(a,u), \psi(a,u)\big)$ 和 $\big(\varphi(b,u), \psi(b,u)\big)$, $0 \le u \le 1$，分别是给定点 A, B 的极坐标。则对于任一给定之 u，

$$\Gamma_u = \left\{\Gamma_u(t) = \big(\varphi(t,u), \psi(t,u)\big),\ a \le t \le b\right\} \tag{5.24}$$

乃是一条连结于 A, B 之间的平滑曲线，而 $\{\Gamma_u, 0 \le u \le 1\}$ 则构成一个「单维变动」的平滑曲线系，其中 $0 \le u \le 1$ 就是用来标记该曲线系的

「变动参数」(parameter of variation)，我们把它简称为一个曲线之变分(a variation of curves)。一个曲线之变分的图像表达如 [图 5–14] 之图解所示。



[图 5–14]

令 $L(u)$ 为 Γ_u 的弧长，则 $L(u)$ 乃是一个定义于 $0 \leq u \leq 1$ 的可微函数，而其函数值则可以用弧长积分式表达之，即

$$L(u) = \int_a^b \Big[\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\Big)^2 + f(\varphi)^2\Big(\frac{\partial\psi}{\partial t}\Big)^2\Big]^{\frac{1}{2}} dt \tag{5.25}$$

我们所要研讨者乃是 $\left.\dfrac{dL}{du}\right|_{u=0}$ 的积分表达式。因为 $\varphi(t,u)$ 和 $\psi(t,u)$ 的几何意义分别就是 $\Gamma_u(t)$ 的极坐标 r 和 θ，所以在下面的计算中我们将根本改用 $r(t,u)$ 和 $\theta(t,u)$ 记之。

[注]：在这里，同学们遇到在纯为单元的微积分中尚未接触的偏微分符号如 $\frac{\partial\varphi}{\partial t}, \frac{\partial\varphi}{\partial u}$ 等等。例如 $\varphi(t,u)$ 乃是一个二元函数，其值是随着 t 和 u 的变动而改变的。但是在 u 取定为 u_0 的局限之下，$\varphi(t,u_0)$ 其实就是一个单元函数，它对于 t 的微分叫做 $\varphi(t,u)$ 对于 t 的偏微分，以 $\frac{\partial\varphi}{\partial t}$ 记之，所以它本质上乃是单元函数的微分。在此初见，其实乃是旧知新用。

$$\left.\frac{dL}{du}\right|_{u=0} = \int_a^b \frac{\partial}{\partial u}\Big[\Big(\frac{\partial r}{\partial t}\Big)^2 + f(r)^2\Big(\frac{\partial\theta}{\partial t}\Big)^2\Big]^{\frac{1}{2}}\Big|_{u=0} dt \tag{5.26}$$

$$= \int_a^b \Big[\Big(\frac{\partial r}{\partial t}\Big)^2 + f^2\Big(\frac{\partial\theta}{\partial t}\Big)^2\Big]^{-\frac{1}{2}}\left\{\frac{\partial r}{\partial t}\frac{\partial^2 r}{\partial u\partial t} + ff'\frac{\partial r}{\partial u}\Big(\frac{\partial\theta}{\partial t}\Big)^2 + f^2\frac{\partial\theta}{\partial t}\frac{\partial^2\theta}{\partial u\partial t}\right\}\Bigg|_{u=0} dt$$

在上述积分式中所出现的 $[\quad]^{-\frac{1}{2}}\Big|_{u=0}$ 因式，在计算上是一个令人头痛者，而我们可以运用下述简朴的几何思想把这个令人头痛者化解成恒

等于 1：一条曲线的长度当然和它的参数表式中参数选取无关。假如我们把上述参数 t 改用曲线 Γ_0 上的弧长参数 s，则有

$$\left[\left(\frac{\partial r}{\partial s}\right)^2 + f(r)^2\left(\frac{\partial \theta}{\partial s}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\Bigg|_{u=0} \equiv 1$$

请注意：s 只是 Γ_0 上的弧长参数，一般来说它并非其他的 Γ_u 上的弧长参数，亦即 (5.26)–式中的 $[\quad]^{-\frac{1}{2}}$ 只有在代入 $u=0$ 之後才恒等于 1；但是这也正是我们在简化 (5.26) 中所需要者。总之，在下述计算中，我们将改用上述 Γ_0 的弧长参数 s，而 (5.26)–式则简化成

$$\frac{dL}{du}\Bigg|_{u=0} = \int_0^{L(0)} \left\{\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial^2 r}{\partial u \partial s} + ff'\frac{\partial r}{\partial u}\left(\frac{\partial \theta}{\partial s}\right)^2 + f^2\frac{\partial \theta}{\partial s}\frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial s}\right\}\Bigg|_{u=0} ds \tag{5.26$'$}$$

在 (5.26′)–式之中所含的两个交差偏微分 $\dfrac{\partial^2 r}{\partial s \partial u}\Big|_{u=0}$ 和 $\dfrac{\partial^2 \theta}{\partial s \partial u}\Big|_{u=0}$ 的几何意义间接且不甚明确，宜用部分积分公式 (integration by parts) 把它们更换成其几何意义更加明确的 $\dfrac{\partial^2 r}{\partial s^2}\Big|_{u=0}$ 和 $\dfrac{\partial^2 \theta}{\partial s^2}\Big|_{u=0}$。这样的计算就可以把 (5.26′)–式中的第一、第三项分别作下述改写：

$$\begin{aligned}
&\int_0^{L(0)} \frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial^2 r}{\partial s \partial u}\Bigg|_{u=0} ds = \left[\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial u}\Bigg|_{u=0}\right]_0^{L(0)} - \int_0^{L(0)} \frac{\partial^2 r}{\partial s^2}\frac{\partial r}{\partial u}\Bigg|_{u=0} ds \\
&\int_0^{L(0)} f^2\frac{\partial \theta}{\partial s}\frac{\partial^2 \theta}{\partial s \partial u}\Bigg|_{u=0} ds = \left[f^2\frac{\partial \theta}{\partial s}\frac{\partial \theta}{\partial u}\Bigg|_{u=0}\right]_0^{L(0)} \\
&\qquad\qquad - \int_0^{L(0)} \left\{2ff'\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial \theta}{\partial s}\frac{\partial \theta}{\partial u} + f^2\frac{\partial^2 \theta}{\partial s^2}\frac{\partial \theta}{\partial u}\right\}\Bigg|_{u=0} ds
\end{aligned} \tag{5.27}$$

而且由于 Γ_u 的始终两点是固定不动的，所以

$$\frac{\partial r}{\partial u}\Bigg|_{s=0} = \frac{\partial r}{\partial u}\Bigg|_{s=L(0)} = \frac{\partial \theta}{\partial u}\Bigg|_{s=0} = \frac{\partial \theta}{\partial u}\Bigg|_{s=L(0)} = 0$$

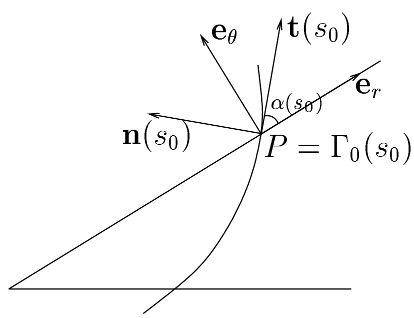
所以 (5.27′) 的两式中的第一项皆为 0。将 (5.27′)–式取代 (5.26)–式中的

第一、第三项，即得

$$\left.\frac{dL}{du}\right|_{u=0} = -\int_0^{L(0)} \left\{\frac{\partial r}{\partial u}\frac{\partial^2 r}{\partial s^2} - ff'\frac{\partial r}{\partial u}\left(\frac{\partial\theta}{\partial s}\right)^2 + \left(2ff'\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial\theta}{\partial s} + f^2\frac{\partial^2\theta}{\partial s^2}\right)\frac{\partial\theta}{\partial u}\right\}\Bigg|_{u=0} ds \tag{5.28}$$

现在，我们还要进一步研讨 (5.28)–式的表式整体的几何意义何在。此事当然得从起始曲线 Γ_0 在每一点 s 的局部几何中去探索之。

设 $P = \Gamma_0(s_0) = \big(r(s_0, 0), \theta(s_0, 0)\big)$ 为起始曲线 Γ_0 上任给一点。如 [图 5–15] 所示，$M^2(f)$ 在 P 的切平面中具有两组自然给有的正交基 (orthonormal bases)，其一为曲线 Γ_0 在 P 点的单位切向量 $\mathbf{t}(s_0)$ 和单位法向量 $\mathbf{n}(s_0)$，其二则是极坐标系在 P 点坐标曲线单位切向量 $\mathbf{e}_r(P)$ 和 $\mathbf{e}_\theta(P)$。



[图 5–15]

令 $\alpha(s_0)$ 为它们之间相差的转角，则有

$$\begin{aligned} \mathbf{t}(s_0) &= \cos\alpha(s_0)\mathbf{e}_r + \sin\alpha(s_0)\mathbf{e}_\theta \\ \mathbf{n}(s_0) &= -\sin\alpha(s_0)\mathbf{e}_r + \cos\alpha(s_0)\mathbf{e}_\theta \end{aligned} \tag{5.29}$$

再者，由 [图 5–15] 可见

$$\begin{aligned} &\cos\alpha(s_0) = \left.\frac{dr}{ds}\right|_{s_0}, \quad \sin\alpha(s_0) = f(r)\left.\frac{d\theta}{ds}\right|_{s_0} \\ &\mathbf{e}_r = \frac{\partial}{\partial r}, \quad \mathbf{e}_\theta = \frac{1}{f(r)}\frac{\partial}{\partial\theta} \end{aligned} \tag{5.30}$$

其中 $\frac{\partial}{\partial r}$ 和 $\frac{\partial}{\partial\theta}$ 分别表示沿著坐标曲线「$\theta=$ 常数」和「$r=$ 常数」而且分别以 r 和 θ 为其参变数的速度向量。再对 (5.30)-(i) 微分即得

$$-\sin\alpha\frac{d\alpha}{ds}=\frac{d^2r}{ds^2},\quad \cos\alpha\frac{d\alpha}{ds}=f'(r)\frac{dr}{ds}\frac{d\theta}{ds}+f(r)\frac{d^2\theta}{ds^2}\tag{5.31}$$

用上式来消去 (5.28)–式中的 $\dfrac{d^2r}{ds^2}$ 和 $\dfrac{d^2\theta}{ds^2}$，可得

$$\begin{aligned}\frac{dL}{du}\bigg|_{u=0}&=-\int_0^{L(0)}\Big(\frac{d\alpha}{ds}+f'(r)\frac{d\theta}{ds}\Big)\cdot\Big\{-\sin\alpha\frac{\partial r}{\partial u}\bigg|_{u=0}+\cos\alpha f(r)\frac{\partial\theta}{\partial u}\bigg|_{u=0}\Big\}ds\\ &=-\int_0^{L(0)}\Big(\frac{d\alpha}{ds}+f'(r)\frac{d\theta}{ds}\Big)\mathbf{n}(s)\cdot\mathbf{v}(s)ds\end{aligned}\tag{5.32}$$

其中

$$\mathbf{v}(s)=\frac{\partial r}{\partial u}\bigg|_{u=0}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\partial\theta}{\partial u}\bigg|_{u=0}\frac{\partial}{\partial\theta}=\frac{\partial r}{\partial u}\bigg|_{u=0}\mathbf{e}_r+f(r)\frac{\partial\theta}{\partial u}\bigg|_{u=0}\mathbf{e}_\theta$$

乃是沿著以 u 为参变数，曲线 $\big\{\big(r(s,u),\theta(s,u)\big),\ 0\le u\le 1\big\}$ 在 $\big(r(s,0),\theta(s,0)\big)$ 点的速度向量（参见 [图 5–15] 之所示）。通常我们把 $\{\mathbf{v}(s),\,0\le s\le L(0)\}$ 叫做变分向量场，把公式

$$\frac{dL}{du}\bigg|_{u=0}=-\int_0^{L(0)}\Big(\frac{d\alpha}{ds}+f'(r)\frac{d\theta}{ds}\Big)\mathbf{n}(s)\cdot\mathbf{v}(s)ds\tag{5.33}$$

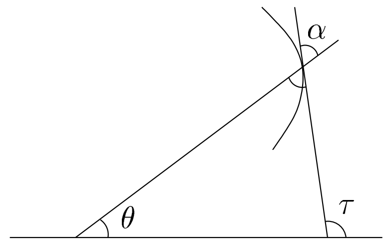
叫做 $M^2(f)$ 上的<u>弧长第一变分公式</u>。

[注]：上述 $M^2(f)$ 上的弧长第一变分公式的证明，对于初读者也许难以一读就懂。所以得逐步自行验算，逐步检查每步之要点。其实所用到的计算每步都是形式的微分、部分积分和代换化简。

在 $f(r)=r$，亦即 $M^2(f)$ 是欧氏平面的情形。如 [图 5–16] 所示，弧长第一变分公式之中所出现之

$$\frac{d\alpha}{ds}+f'(r)\frac{d\theta}{ds}=\frac{d\alpha}{ds}+\frac{d\theta}{ds}=\frac{d\tau}{ds}$$

乃是欧氏平面之中曲线的曲率 (curvature)。所以在 $M^2(f)$ 之中，$\dfrac{d\alpha}{ds}+f'(r)\dfrac{d\theta}{ds}$ 乃是曲线曲率的推广。



[图 5–16]

【定义】：$M^2(f)$ 中曲线的测地曲率 (geodesic curvature) 定义为

$$\kappa_g(s) = \frac{d\alpha}{ds} + f'(r)\frac{d\theta}{ds} \tag{5.34}$$

$M^2(f)$ 中测地曲率恒为 0 的曲线叫做 $M^2(f)$ 中的测地线 (geodesic curves)。

[定理 5.4]之证明：

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}\big(f(r)\sin\alpha\big) &= f(r)\cos\alpha\frac{d\alpha}{ds} + f'(r)\frac{dr}{ds}\sin\alpha \\ &= f(r)\frac{dr}{ds}\Big(\frac{d\alpha}{ds} + f'(r)\frac{d\theta}{ds}\Big) = 0 \end{aligned} \tag{5.35}$$

所以 $f(r)\sin\alpha$ 沿著一条测地线乃是一个常数。

[推论 3]之证明：

沿著测地线 $\overline{AB}$，$f(r)\sin\alpha = f(b)\sin A$（常数），所以

$$\begin{aligned} \frac{dr}{ds} &= \cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha} = \pm\sqrt{1-\Big(\frac{f(b)\sin A}{f(r)}\Big)^2} \\ &= \frac{\pm\sqrt{f(r)^2-(f(b)\sin A)^2}}{f(r)} \end{aligned} \tag{5.36}$$

亦即

$$\overline{AB} = \int_b^a ds = \int_b^a \frac{f(r)dr}{\pm\sqrt{f(r)^2-(f(b)\sin A)^2}} \tag{5.37}$$

[注]：在 $f(r)$ 是一般的二阶连续可微函数的情形，$M^2(f)$ 中对于 $\triangle OAB$ 的广义馀弦定律就是上述积分公式。但是在 $f(r)$ 是 $r, \sin r$ 或 $\sinh r$ 这

三种特殊而且重要的情形，则积分公式 (5.37) 可以用初等函数加以表达，这也就分别是欧氏、球面和非欧几何中的馀弦定律。[其验算乃是积分计算的一个有意思的习题。]

5.5 旋转面的 Gauss 曲率和 Gauss-Bonnet 公式

在一般的旋转面 $M^2(f)$ 中，§5.4 中所证明的广义正弦、馀弦定律只有在三角形的一个顶点位于旋转对称的基点，亦即 $\triangle OAB$，这种情形才成立。而且正弦、馀弦定律分别只有一个公式，即

$$\frac{\sin A}{f(a)} = \frac{\sin B}{f(b)}$$
$$\overline{AB} = \int_b^a \frac{f(r)dr}{\pm\sqrt{f(r)^2 - (f(b)\sin A)^2}}$$

只有在 $M^2(f)$ 对于其中任给一点皆为旋转对称的情形，才会对于任何三角形都有其正弦、馀弦定律，因为其任选一点皆可作为旋转对称之基点也！换句话说，只有在 $M^2(f)$ 是匀称 (homogeneous) 的情形，正弦、馀弦定律才能够对于任给三角形普遍成立！

在这里自然会想到去研讨下述问题，即究竟有那些旋转面是匀称的呢？亦即对于其中每一点都是旋转对称者。欧氏平面、半径为 R 的球面以及非欧面都是匀称的旋转面，它们的本质函数 $f(r)$ 分别是

$$f(r) = \begin{cases} r & \text{（欧氏）} \\ \dfrac{1}{\sqrt{K}}\sin\sqrt{K}r & \text{（球面，}K = \dfrac{1}{R^2}\text{）} \\ \dfrac{1}{\sqrt{K'}}\sinh\sqrt{K'}r & \text{（非欧，}\delta(\triangle) = K'A(\triangle)\text{）} \end{cases} \tag{5.38}$$

从解析的观点来看，上述三者分别满足

$$f''(r) + Kf(r) = 0, \quad f(0) = 0 \ \text{和}\ f'(0) = 1 \tag{5.39}$$

其中 $K = 0$（欧氏）, $K > 0$（球面）, $K < 0$（非欧），亦即 (5.39)–式中的 K 也就是使得

$$\varepsilon(\triangle) = KA(\triangle) \tag{5.39'}$$

的那个本质性常数。

本节将证明下述匀称旋转面的唯一性定理，即

【定理 5.5】：$M^2(f)$ 是一个匀称旋转面的充要条件就是 $f(r)$ 满足 (5.39)。

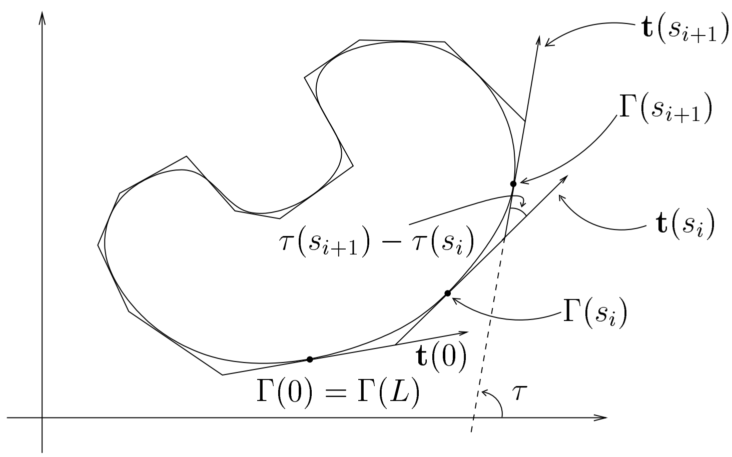
再者，从上述简短的分析，还可以想到[定理 5.5]的证明，自然地会和欧氏、球面以及非欧面的三角形内角和定理在 $M^2(f)$ 上的推广有关。首先，让我们先来分析一下三角形内角和定理本身在欧氏平面和球面上的自然推广应该是什麼形式。

【分析】：

（一）欧氏平面三角形内角和定理的自然推广：

由三角形内角和恒为一个平角，很容易推广成 n 边形的内角和恒等于 $(n-2)$ 个平角，因为一个 n 边形可以分割成 $(n-2)$ 个三角形。再者，上述 n 边形的内角和定理又可以转化为一个统一的外角和定理，即任何多边形的外角和恒等于一个周角，亦即 2π。

设 Γ 是欧氏平面中一条不自相交的平滑闭曲线。$0 \le s \le L$ 是 Γ 的弧长参数，$\kappa(s)$ 是它在 $\Gamma(s)$ 点的曲率，$\kappa(s) = \frac{d\tau}{ds}$。



[图 5–17]

如 [图 5–17] 所示，对于 Γ 的每一小段皆有

$$(5.40) \qquad \int_{s_i}^{s_{i+1}} \kappa(s)ds = \int_{s_i}^{s_{i+1}} d\tau = \tau(s_{i+1}) - \tau(s_i)$$

所以由前述外角和定理即得

$$\int_0^L \kappa(s)ds = \sum_{i=0}^{N}\int_{s_i}^{s_{i+1}} \kappa(s)ds = \sum_{i=0}^{N}\big(\tau(s_{i+1})-\tau(s_i)\big) = 2\pi \tag{5.41}$$

在一般的情形，设 Ω 是一个单连通的区域，其边界 $\partial\Omega$ 是分段平滑的曲线，而 α_i 则是 $\partial\Omega$ 在其有限个角点的外角，则不难看到

$$\int_{\partial\Omega}\kappa(s)ds + \sum\alpha_i = 2\pi \tag{5.42}$$

这也就是多边形外角和恒等于一个周角的推广。

（二）<u>R–球面上三角形内角和的自然推广</u>：

当 $\triangle$ 是一个 R–球面上的三角形时，即有

$$\begin{aligned}2\pi-(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3) &= 2\pi-\big[(\pi-A)+(\pi-B)+(\pi-C)\big]\\ &= A+B+C-\pi=\varepsilon(\triangle)=\frac{1}{R^2}A(\triangle)\end{aligned} \tag{5.43}$$

当 Ω 是一个 R–球面上的多边形，则可以把 Ω 分割成三角形再逐个运用 (5.43)，即得

$$2\pi-\sum\alpha_i = \frac{1}{R^2}A(\Omega) \tag{5.44}$$

由此可以想到在 R–球面上一个边界是分段平滑曲线的单连通区域 R，相应于 (5.42)–式的推广公式应该是：

$$2\pi-\int_{\partial\Omega}\kappa_g(s)ds-\sum\alpha_i = \frac{1}{R^2}A(\Omega) \tag{$*$}$$

其中 $\sum\alpha_i$ 乃是 Ω 在其各个角点的外角之和，而 $\kappa_g(s)=\dfrac{d\alpha}{ds}+\cos\big(\dfrac{r}{R}\big)\dfrac{d\theta}{ds}$ 是 R–球面上的<u>测地曲率</u>。至少，在 $\partial\Omega$ 是分段测地线的情形，$(*)$ 的正确性业已成立，即 (5.44)。现在让我们再来验证一个 Ω 是一个半径为 r_0 的圆的特殊情形。如 [图 5–18] 所示，$\partial\Omega$（亦即 $r=r_0$）在每一点的 α 都等于 $\frac{\pi}{2}, r=r_0$。所以

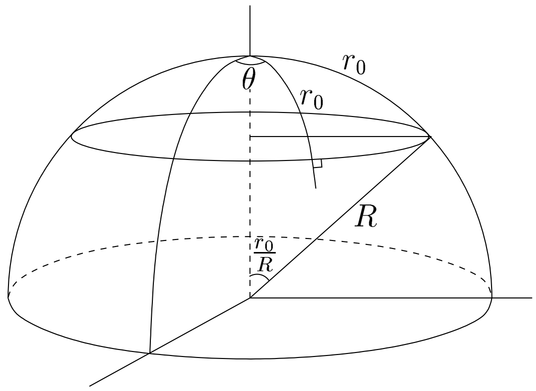
$$\begin{aligned}\kappa_g(s) &= \frac{d\alpha}{ds}+f'(r)\frac{d\theta}{ds}=\cos\frac{r_0}{R}\frac{d\theta}{ds}=\frac{1}{R}\cot\frac{r_0}{R}\\ \int_{\partial\Omega}\kappa(s)ds &= \frac{1}{R}\cot\frac{r_0}{R}\cdot 2\pi R\sin\frac{r_0}{R}=2\pi\cos\frac{r_0}{R}\end{aligned} \tag{5.45}$$

另一方面，由 Archimedes 的球面面积公式的证明，易见

$$A(\Omega) = R^2 \cdot 2\pi\big(1 - \cos\frac{r_0}{R}\big) \tag{5.46}$$

这样也就验证了 $(*)$–式在上述特殊情形的正确性，即

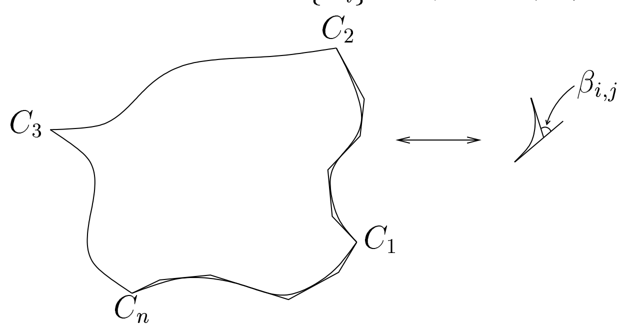
$$2\pi - \int_{\partial\Omega} \kappa_g(s)ds = 2\pi\big(1 - \cos\frac{r_0}{R}\big) = \frac{1}{R^2}A(\Omega) \tag{5.47}$$



[图 5–18]

现在让我们进而验证 $(*)$–式在 R–球面上的普遍正确性：我们将采用一种简朴自然的想法，把上述验证归于前面两种业已得证的特殊情形（亦即 $\partial\Omega$ 是多边形和圆）的适当组合来加以论证。

设 Ω 是一个 R–球面上的单连通区域，而且其边界 $\partial\Omega$ 是分段平滑的。令 $\{C_i\}$ 是 $\partial\Omega$ 的角点，$\{\alpha_i\}$ 是各个角点的外角。在 $\partial\Omega$ 的第 i 段平滑曲线 $\overset{\frown}{C_iC_{i+1}}$ 选取其 n–等分点，然後再在每点作其相切于 $\partial\Omega$ 的测地线（亦即大圆圆弧）。如 [图 5–19] 所示，它们围成一个其各边和 $\partial\Omega$ 相切于那些等分点而且和 $\partial\Omega$ 在角 $\{C_i\}$ 具有同一外角的多边形 Ω_n。



[图 5–19]

对于上述所构造的多边形 Ω_n，它除了在那些和 Ω 共有的角点 $\{C_i\}$ 的外角是 α_i，还有那种如局部放大插图所示的外角 $\beta_{i,j}$。所以有

$$2\pi - \sum_i \alpha_i - \sum_{i,j} \beta_{i,j} = \frac{1}{R^2} A(\Omega_n) \tag{5.48}$$

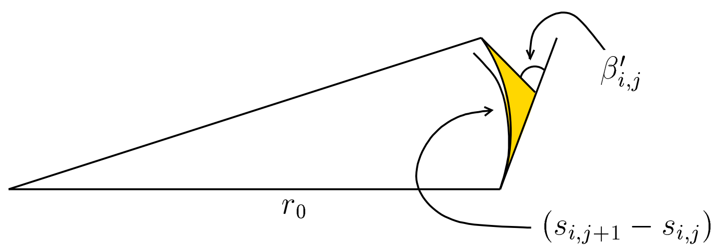
把 (5.48)–式和所要证明的 $(*)$ 相比较，不难看到我们所要证明者，可以归于下述极限式去验证之，亦即 $(**)$ 是否成立？

$$\lim_{n\to\infty} \left(\int_{s_i}^{s_{i+1}} \kappa_g(s) ds - \sum_{j=1}^{n} \beta_{i,j} \right) = 0 \tag{$**$}$$

再者，由积分的定义，$(**)$–式的验证又可以归于

$$\left| \kappa_g(s_{i,j}) \cdot \big(s_{i,j+1} - s_{i,j}\big) - \beta_{i,j} \right| \tag{$***$}$$

是否是微量 $\big(s_{i,j+1} - s_{i,j}\big)$ 的高阶微量（亦即是至大和 $\big(s_{i,j+1} - s_{i,j}\big)^2$ 相当者）的验证。由为 $\kappa_g(s)$ 是一个连续可微函数，所以 $(***)$ 的验证又可以归于 $\kappa_g(s)$ 在微段 $[s_{i,j}, s_{i,j+1}]$ 上取常数值 $\kappa_g(s_{i,j})$ 的情形验算之，亦即 $\partial\Omega$ 在上述微段乃是一段圆弧的情形。由 [图 5–20] 所示



[图 5–20]

由 (5.45), (5.46) 的局部形式可得

$$\kappa_g(s_{i,j})\big(s_{i,j+1} - s_{i,j}\big) - \beta'_{i,j} = \frac{1}{R^2}(\,\cdot\,) \tag{5.49}$$

而 (5.49)–式右侧的面积显然是弧长 $\big(s_{i,j}, s_{i,j+1}\big)$ 的二阶微量。这样，也就验证了 $(*)$–式在 R–球面上是普遍成立的。

从上面对于欧氏平面和 R–球面这种简朴而且基本的情形，实事求是的探索和验证，使得我们认识到

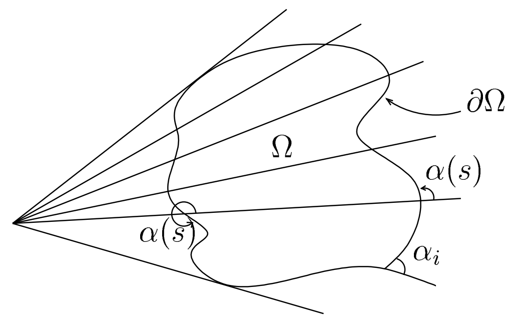
$$2\pi - \int_{\partial\Omega} \kappa_g(s) ds - \sum \alpha_i \tag{$\star$}$$

乃是一个值得深究的基本几何量，因为它乃是多边形外角和的自然推广，而且在欧氏和 R–球面的情形简洁地反映着它们的「本质性二维曲率」。有了这样一个明确的目标，就不难实事求是去研究它和区域 Ω 的那一种几何本质密切相关。这种研讨之所得就是下述重要的几何公式，即

【定理 5.6】（旋转面的 Gauss-Bonnet 公式）：

$$2\pi - \int_{\partial\Omega} \kappa_g(s)ds - \sum \alpha_i = \iint\limits_{\Omega} \left(-\frac{f''(r)}{f(r)} \right) dA \tag{5.50}$$

证明：若将所给的 Ω 分割成 Ω_1, Ω_2，则易见 (5.50)–式的两侧都可以分别表成它在 Ω_1, Ω_2 的几何量之和。由此可见[定理 5.6]的证明可以用适当的分割，把一般的情形归于 Ω 如 [图 5–21] 所示的情形加以论证，亦即 Ω 位于 $\theta_0 \leq \theta \leq \theta_1$ 的范围之内。



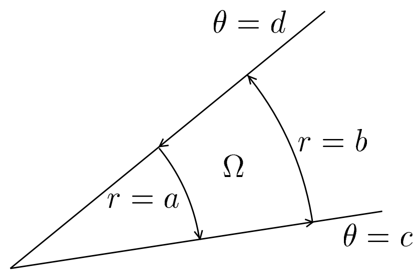
[图 5–21]

对于这样的区域 Ω, $2\pi - \int_{\partial\Omega} d\alpha - \sum \alpha_i = 0$。所以

$$\begin{aligned}
& 2\pi - \int_{\partial\Omega} \kappa_g(s)ds - \sum \alpha_i \\
&= \big(2\pi - \int_{\partial\Omega} d\alpha - \sum \alpha_i\big) - \int_{\partial\Omega} f'(r)d\theta \\
&= -\int_{\partial\Omega} f'(r)d\theta = -\iint\limits_{\Omega} f''(r)dr \wedge d\theta \quad \text{（Green's 定理）} \\
&= \iint\limits_{\Omega} \left(-\frac{f''(r)}{f(r)} \right) f(r)dr \wedge d\theta = \iint\limits_{\Omega} \left(-\frac{f''(r)}{f(r)} \right) dA
\end{aligned} \tag{5.51}$$

□

[注]：$\int_{\partial\Omega} f'(r)d\theta = \iint_\Omega f''(r)dr \wedge d\theta$ 是二元微积分中 Green's 定理的特殊情形。其证明可以归于 Ω 是坐标矩形（亦即 $\Omega = \{(r,\theta), a \le r \le b,\ c \le \theta \le d\}$）的情形组合而得。再者，在 Ω 是坐标矩形的情形，如 [图 5–22] 所示：



[图 5–22]

$$
\begin{aligned}
\int_{\partial\Omega} f'(r)d\theta &= f'(b)(d-c) + f'(a)(d-c) \\
&= (d-c)(f'(b) - f'(a)) = (d-c)\int_a^b f''(r)dr \qquad (5.52)\\
&= \int_c^d \Big[\int_a^b f''(r)dr\Big]d\theta = \iint_\Omega f''(r)dr \wedge d\theta
\end{aligned}
$$

乃是单元微积分基本定理的直接推论。

【推论 1】：$-\dfrac{f''(r)}{f(r)}$ 乃是一个具有本质性的局部 (intrinsic local) 几何量，它就是 $M^2(f)$ 在 $P(r,\theta)$ 点的高斯曲率。

<u>证明</u>：当我们在 $P(r_0,\theta_0)$ 点任选一个邻域 Ω，则由 (5.50)–式的左侧可见 $\displaystyle\iint_\Omega \Big(-\frac{f''(r)}{f(r)}\Big)dA$ 是一个本质性的局部几何量。再者当 $A(\Omega) \to 0$

$$
-\frac{f''(r_0)}{f(r_0)} = \lim_{A(\Omega)\to 0} \frac{\iint_\Omega \big(-\frac{f''(r)}{f(r)}\big)dA}{A(\Omega)} \qquad (5.53)
$$

所以 $-\dfrac{f''(r)}{f(r)}$ 本身乃是一个具有本质性的局部几何量。 □

【推论 2】：$M^2(f)$ 是匀称 (homogeneous) 的必要条件是 $-\dfrac{f''(r)}{f(r)}$ 等于一个常数。

证明：$M^2(f)$ 是一个匀称的旋转面，亦即 $M^2(f)$ 中任给两点 P, Q 都有一个 $M^2(f)$ 的保长变换 (isometry) 把 P 点映射到 Q 点。由此可见 P, Q 两点具有完全相同的局部几何性质，所以 $\left(-\dfrac{f''(r)}{f(r)}\right)_P = \left(-\dfrac{f''(r)}{f(r)}\right)_Q$，亦即 $-\dfrac{f''(r)}{f(r)}$ 是一个常数。 □

【推论 3】（定理 5.5）：$M^2(f)$ 是匀称的必要条件是

$$f(r) = \begin{cases} r & (K=0) \\ \dfrac{1}{\sqrt{K}} \sin \sqrt{K} r & (K>0) \\ \dfrac{1}{\sqrt{-K}} \sinh \sqrt{-K} r & (K<0) \end{cases} \tag{5.54}$$

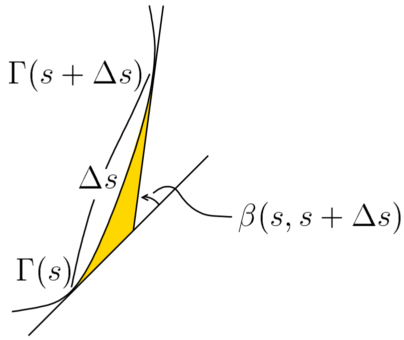
证明：由[推论 2]得知 $-\dfrac{f''(r)}{f(r)} = \text{常数} = K$，亦即 $f(r)$ 乃是下述二阶常微分方程

$$f''(r) + K f(r) = 0 \tag{5.55}$$

满足初值条件 $f(0) = 0$ 和 $f'(0) = 1$ 的解。易证这种解是唯一的，而 (5.54) 所给者就是那个唯一解。 □

【推论 4】：设 Γ 是一条平滑曲线，s 是其弧长参数。如 [图 5–23] 所示，$\beta(s, s+\Delta s)$ 乃是 Γ 在 $\Gamma(s)$ 和 $\Gamma(s+\Delta s)$ 这两点的测地线切线相交的外角，则有

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\beta(s, s+\Delta s)}{\Delta s} = \kappa_g(s) \tag{5.56}$$



[图 5–23]

证明：令 Ω 为 [图 5–23] 中阴影所示的区域。由公式 (5.50)，即有

$$2\pi - \int_{s+\Delta s}^{s} \kappa_g(s)ds - 2\pi - \beta(s, s+\Delta s) = \iint_{\Omega} \left(-\frac{f''(r)}{f(r)} \right) dA \tag{5.57}$$

而上式右侧之量显然是和 $A(\Omega)$ 相当者，所以是和 Δs^2 相当者。因此

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\beta(s, s+\Delta s)}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \to 0} \int_{s}^{s+\Delta s} \kappa_g(s)ds = \kappa_g(s) \tag{5.58}$$

□

[注]：(5.56)–式也就说明了一条曲线的测地曲率的几何内涵及其名称的来由。

5.6 结语

总结本章的研讨，我们对于欧氏、球面和非欧这三种具有高度对称性的几何体系，获得了下述几点统一全局的认知：

（一）三者具有同样的连续性和对称性（例如三角形 S.A.S. 叠合性），但是三者的三角形内角和则分别是等于，大于和小于一个平角。

（二）对于对称性的深入定量分析所得的基本定理就是三种几何学中的正弦、馀弦定律。而且通过旋转面的解析几何，我们认识到正弦定律的本质乃是沿著测地线的等速运动对于旋转对称的角动量守恒定律。这种统一的观点使得我们一方面可以把原来只是在欧氏、球面和非

欧几何中的正弦、馀弦定律推广成所有旋转面皆有的广义正弦、馀弦定律，而且也因而把原先各别论证的基本定理给以统一的证明。

（三）对于欧氏、球面和非欧几何中的三角形内角和，我们有一个形式上统一的定理，亦即

$$\varepsilon(\triangle) = KA(\triangle)$$

其中 K 分别是等于，大于和小于零的常数。把它扩展而且深化之所得，即为下述 Gauss-Bonnet 公式：

$$2\pi - \int_{\partial\Omega} \kappa_g(s)ds - \sum \alpha_i = KA(\Omega)$$

而上述公式又可以推广成任给旋转面 $M^2(f)$ 上的 Gauss-Bonnet 公式，即

$$2\pi - \int_{\partial\Omega} \kappa_g(s)ds - \sum \alpha_i = \iint\limits_{\Omega} \left(-\frac{f''(r)}{f(r)} \right) dA$$

（四）上述公式的[推论 2]和[推论 3]确立了具有欧氏、球面和非欧几何同样的高度对称性的几何体系是唯一存在的，对于每一个 K 只有一个，它就是 (5.54)–式所给定的 $f(r)$ 所组成的 $M^2(f)$！

（五）上述唯一性定理的一个直接推论是：在欧氏公理体系中，若将第五公设改用任何「一小点」在欧氏空间成立但是在非欧空间不成立的假设，皆足以完全刻划欧氏几何。这也就是为什麼两千多年来有很多杰出的几何学家，误认为他们业已找到第五公设的证明的原由。因为在任何地方不自觉地渗入「一小点」欧氏几何中显然成立的「奥援」(implicit help)，第五公设就可以从而得以证之。从 Gauss 关于这方面的书信中，可以看到他在试图证明第五公设中，肯定有过多次渗入杂念因而犯错的私下体验。

（六）由本章的讨论，可以看到欧氏、球面和非欧这三种几何，不但大同小异，而且还存在著大量深刻的共同定理。这种三者皆成立的共性几何的系统研究，其实是十分有意义而且有待我们致力拓展的领域。当年 Bolyai 在他开创性的短文（总共只有 26 页），业已创导这样一种几何学，他称之为绝对几何 (absolute geometry)。Bolyai 正弦定律，即

$$\frac{\sin A}{\odot a} = \frac{\sin B}{\odot b} = \frac{\sin C}{\odot c}$$

就是其中所得的一个辉煌成就。本章的研讨方式可以说是直接继承他的创见者。其实，也唯有对于绝对几何学作深入研究，我们才能真正深刻地理解对称性的既深且广的影响与威力！

5.7 思考题与习题

I. 旋转面上测地线的参数式

极坐标乃是一个具有旋转对称的二维空间的简洁表述，它简明扼要地描述了任给一点 P 和基点 O 之间的距离和方向 (r, θ)，而且弧长元素：$ds^2 = dr^2 + f(r)^2 d\theta^2$ 之中的 $f(r)$ 则简明扼要地总结了所给旋转面的整体本质 (complete intrinsic invariant)。再者，测地线乃是空间之中最为简朴基本的几何事物，在极坐标中，它们可以用下述二阶常微分方程加以刻划，即

$$(*) \qquad \frac{d\alpha}{ds} + f'(r)\frac{d\theta}{ds} = 0, \quad \cos\alpha = \frac{dr}{ds}, \ \sin\alpha = f(r)\frac{d\theta}{ds}$$

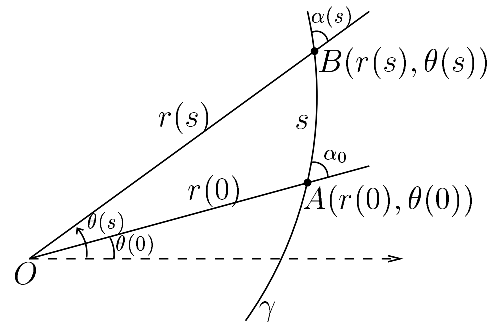
再者，上述二阶常微分方程乃是下述含有一个任意常数的一阶常微分方程的微分所得，即

$$(**) \qquad f(r)\sin\alpha = C_1 \quad （常数）$$

通常把 $(**)$ 叫做 $(*)$ 的第一积分 (first integral)。当然，在一个给定旋转面 $M^2(f)$ 上的一条曲线最为明确的描述乃是直接给出它的极坐标参数式，即

$$(***) \qquad r = \varphi(s), \quad \theta = \psi(s) \qquad (s\text{：弧长参数})$$

为此，我们得由 $(**)$ 再做一次积分：



[图 5–24]

如 [图 5–24] 所示，γ 乃是以 $A(r(0),\theta(0))$ 为起点，以 α_0 为其起始方向的测地线。令 $C_1 = f(r(0))\sin\alpha_0$，再由

$$\frac{dr}{ds} = \cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha} = \frac{\pm\sqrt{f(r)^2 - C_1^2}}{f(r)} \tag{5.59}$$

积分可得

$$s = \pm\int_{r(0)}^{r(s)} \frac{f(r)dr}{\sqrt{f(r)^2 - C_1^2}} \tag{$***$}_1$$

亦即所求的 r 的参数表式 $\varphi(s)$ 乃是上述积分式所表述的函数关系的逆函数是也。这也就是广义馀弦定律。

再者，

$$C_1 = f(r)\sin\alpha = f(r)^2\frac{d\theta}{ds} \tag{5.60}$$

积分可得

$$\theta(s) - \theta(0) = \int_0^s \frac{C_1}{f(r)^2}ds \tag{$***$}_2$$

对于一般的 $f(r)$，测地线的参数式只能写成上述两个积分表达的形式，即 $(***)_1$ 和 $(***)_2$。但是在 $f(r) = r$，或 $\sin r$，或 $\sinh r$ 这三种既特别又重要的情形，上述积分表达式是可以用初等函数直接表达者，这也就是我们要研讨的一系列习题，它们可以看做微积分中的积分技巧 (techniques of integration) 的一种自然而且重要的应用。

【习题】：

(1) 在 $f(r)=r$ 的情形（亦即欧氏平面），求解初值为 $\{r(0)=b,\theta(0)=0,\alpha_0=\frac{\pi}{2}\}$ 的测地线的参数式。

(2) 在 $f(r)=\sin r$ 的情形（亦即单位球面），求解初值为 $\{r(0)=b,\theta(0)=0,\alpha_0=\frac{\pi}{2}\}$ 的测地线的参数式。

(3) 定义 $\cosh x=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x}),\sinh x=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$。验证下列等式：

$$\begin{aligned}&\cosh^2 x-\sinh^2 x=1\\&\cos(ix)=\cosh x,\quad \sin(ix)=i\sinh x\\&\cosh(x+y)=\cosh x\cosh y+\sinh x\sinh y\\&\sinh(x+y)=\sinh x\cosh y+\cosh x\sinh y\\&\tfrac{d}{dx}\cosh x=\sinh x,\quad \tfrac{d}{dx}\sinh x=\cosh x\end{aligned}$$

[注]：Euler 公式：$\cos x=\frac{1}{2}(e^{ix}+e^{-ix}),\sin x=\frac{1}{2i}(e^{ix}-e^{-ix})$。

(4) 在 $f(r)=\sinh r$ 的情形（亦即曲率为 -1 的非欧面），求解初值为 $\{r(0)=b,\theta(0)=0,\alpha_0=\frac{\pi}{2}\}$ 的测地线的参数式。

II. $M^2(\sinh r)$ 的匀称性：

在[推论 3]业已证明了$M^2(f)$ 只有在

$$f(r)=\begin{cases}r & (K=0)\\ \dfrac{1}{\sqrt{K}}\sin\sqrt{K}r & (K>0)\\ \dfrac{1}{\sqrt{-K}}\sinh\sqrt{-K}r & (K<0)\end{cases}$$

这三种情形才可能是匀称者。但是上述三种 $M^2(f)$ 是否真的是匀称者？则当然还得实事求是地加以研讨之。在第一种情形 $M^2(f)$ 其实就是欧氏平面，而在第二种情形 $M^2(f)$ 其实就是半径为 $\frac{1}{\sqrt{K}}$ 的球面，所以它们的匀称性乃是熟知的事实。因此，唯一尚须详加研究者乃是第三种情形。再者，由于匀称性显然在整体的放大、缩小之下保持不变，所以只需要对于其中任给一个取定的 $K<0$ 加以研讨（例如 $K=-1$），亦即 $M^2(\sinh r)$ 是否匀称？上述问题乃是一个重要的基本问题！我们可以从正、反两面来分析其重大的意义如下：

（一）假如 $M^2(\sinh r)$ 是匀称的，则它就是一个几何体系，它和欧氏平面的唯一差别在于其三角形内角和恒小于平角。所以平行公理当然不可能由其他的欧氏几何公理推导而得，这也就证明了非欧几何体系的存在性。

（二）反之，假如 $M^2(\sinh r)$「并非」匀称，则欧氏平面乃是唯一可定向 (orientable) 而且两点定一测地线的匀称旋转面（球面上过对顶两点有无穷多个大圆，而射影平面则是不可定向者也）。由此可见，假如真的能够「证明」$M^2(\sinh r)$ 是不匀称的话，这个证明其实也就构成了一个由其他的欧氏几何公理推导出平行公理的一个论证，是不？当然，此事业已在十九世纪真相大白，$M^2(\sinh r)$ 是的的确确匀称的。而我们下面所要和同学研讨者，乃是如何实事求是地去逐步证明 $M^2(\sinh r)$ 的匀称性。

【分析】：

（一）对于一般的旋转面 $M^2(f)$，我们所证的广义正弦、馀弦定律，仅仅对于 $\triangle OAB$ 才成立，而且仅仅各有一个等式，即

$$\frac{\sin A}{f(a)} = \frac{\sin B}{f(b)} \qquad \text{（广义正弦定律）}$$

$$\overline{AB} = \pm\int_b^a \frac{f(r)dr}{\sqrt{f(r)^2 - (f(b)\sin A)^2}} \qquad \text{（广义馀弦定律）}$$

假如 $M^2(f)$ 是匀称的，则不但上述广义正弦、馀弦定律对于任何三角形 $\triangle ABC$ 都普遍成立，而且有下述两组等式，即

$$\frac{\sin A}{f(a)} = \frac{\sin B}{f(b)} = \frac{\sin C}{f(c)}$$

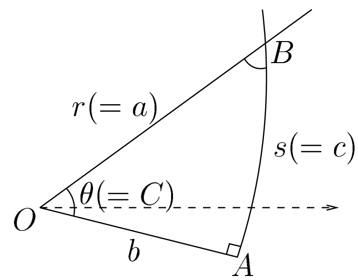
$$\begin{cases} \overline{AB} = \pm\displaystyle\int_b^a \frac{f(r)dr}{\sqrt{f(r)^2 - (f(b)\sin A)^2}} \\ \overline{BC} = \pm\displaystyle\int_c^b \frac{f(r)dr}{\sqrt{f(r)^2 - (f(c)\sin B)^2}} \\ \overline{CA} = \pm\displaystyle\int_a^c \frac{f(r)dr}{\sqrt{f(r)^2 - (f(a)\sin C)^2}} \end{cases}$$

从上面这一段分析，可以想到 $M^2(\sinh r)$ 的匀称性的验证的自然起步，应该就是推导 $\triangle OAB$ 的其他几个等式，例如

$$\frac{\sin\angle AOB}{f(\overline{AB})}=\frac{\sin A}{f(a)},\quad \text{等等}$$

【习题】：

(5) 首先考虑 $f(r)=\sin r$（即单位球面）的情形。设 $\angle A=\frac{\pi}{2}$，如 [图–25] 所示：



[图 5–25]

试验证馀下的正弦、馀弦定律：

(i) $\dfrac{\sin A}{\sin a}\overset{?}{=}\dfrac{\sin C}{\sin c}$ （注意：$\sin A=1$）

(ii) $\cos B\overset{?}{=}\dfrac{\tan c}{\tan a}$

(iii) $\cos C\overset{?}{=}\dfrac{\tan b}{\tan a}$

(6) 考虑 $f(r)=\sinh r$（亦即曲率为 -1 的非欧面）。设 $\angle A=\frac{\pi}{2}$，写下并验证馀下的正弦、馀弦定律。

(7) （讨论）上述对于直角非欧三角形成立 $\triangle OAB$ 的正弦、馀弦定律是否能够推广至任意的非欧三角形？再者，能否以此为根据来解答非欧面的匀称性（亦即存在性）问题？

[注]：上面这一段讨论，乃是基于匀称旋转面的唯一性的认知，按图索骥地去验证 $M^2(\sinh r)$ 乃是匀称者，从而证明非欧面之存在性。当然也可以用其他数学知识，设法去构造一个相异于球面或欧氏平面的匀称旋

转面，则由[推论 3]可知它必然是 $K<0$ 者，这样也就证明了 $M^2(\sinh r)$ 的匀称性，例如在匀称空间 $SO(2,1)/SO(2)$ 上就可以直接构造之（但是得用到李群的概念）。

结语

本册所讨论的单元微积分的基础理论和初步应用乃是整个分析学的雏形与基础之所在。分析学所研讨者乃是变量数学，它是我们对于千变万化的大自然，由表及里、精益求精地作数理分析的主要工具。其实，在一般所要研讨的事物和现象中，其所涉及的参变量当然不可能只是简简单单地两个参变量（即一个自变量和一个因变量），而是多个参变量而且它们之间又具有多个相互关联的函数关系者也。例如三角形就有三个边长，三个角度，面积，外径，内径等等参变量，而它们之间又满足正弦、馀弦定律，面积公式，外径、内径公式等等。由此可见，本册所研讨之课题，乃是一种最为简化的基本情况：一个单变函数的分析，它是我们进而研讨多元多关系的分析学的起点和基本功。唯有先把它学得札实，懂得清楚，学习分析学、学会运用数理分析去理解大自然才有了好的开始，也就不难登堂入室了。在此且再对本册所讨论的单元微积分的精要作一简短的回顾与总结，作为本册的结语。

（一）函数的各种各样的性质之中最为基本者有四，即<u>单调性</u>、<u>连续性</u>，<u>变率</u>与<u>总和</u>，其前两者是定性者而後两者则是定量者。总之，对于上述四者的研讨、理解与运用乃是单元微积分的中心课题和基础理论之所在。

（二）单调性是十分简单而且易用好用的。再者，绝大部分常见常用的函数都是单调或分段单调的，所以读者切勿因为它简单而忽视它，而是要注意到「有则善用之」。例如在第三章研讨指数函数的定义中，善用其单调性和保有指数定则乃是要点之所在。

（三）一个函数 $y=f(x)$ 在某一区间 $[a,b]$（或 (a,b)）上的连续性所包含的条件乃是无比庞大的极限式（亦即 $\lim f(a_n)=f(\lim a_n)$ 对于所有

其中收歛的数列恒成立）。由此可见函数连续性的理解与运用是的确不简单的。首先，我们先得理解直线（和它相应的实数系）的连续性，懂得如何把其所含的几何直观转换成左、右夹逼数列的存在性这种解析描述，然後再通过把它用来研讨闭线段上连续函数的基本性，证明如 Sturm 定理，代数基本定理，Cauchy 条件的极限存在定理等等才能逐步逐样地体认其用场与用法。

（四）归本究源，Hippasus 对于「不可公度线段比」的发现乃是人类理性文明首次触及空间连续性这个深蕴的本质，而 Eudoxus 所创的比较原则和逼近法不但成功地补救了当年定量几何基础论的重大欠缺，而且也提供了理解连续性并进而研讨整个分析学的基本方法。这一段引人入胜、发人深思的史话当然也就是每一位学习分析学的後之来者最自然的启蒙、奠基的佳园。

（五）本册第二章所讨论者，也就是效法 Eudoxus 所创的途径，把它用来研讨函数的两个定量型的基本性质：变率与总和。其具体做法是先行分析其直观内含，从而确立其比较原则，然後再用逼近法去达成它们各别的解析定义。这也就是微分求变率，积分求总和的来由，其本身乃是分析学基础理论的初步阶段。接著把它们和函数连续性（第一章所研讨者）相结合，就不难顺理成章地证明各种各样基本定理（参看第三章）。